This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

UC-NRLF
B 3 976 425

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'Ecole normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME I. — ANNÉE 1891.

(TOME XI DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1891

A 1
1134
4,11

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué d'abord par BORCHARDT, puis par KRONECKER et WEIERSTRASS, enfin par KRONECKER (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333

PRÉFACE.

Le modeste recueil mathématique que nous avons fondé en 1881 est entré dans la onzième année de son existence. Grâce au nombre toujours croissant de nos abonnés, nous avons pu considérablement augmenter le volume de *Mathesis* que nous avions promis de publier annuellement(*) et, par suite, réaliser, mieux que par le passé, les promesses de notre programme.

Ce programme comprend la publication 1° d'articles originaux; 2° de discussions relatives à des points controversés de méthodologie mathématique; 3° de solutions de questions choisies; 4° d'articles bibliographiques et d'extraits analytiques.

Les articles ou mémoires originaux n'ont pas manqué de 1881 à 1890. Pour en faire apprécier la valeur et l'intérêt, il nous suffira d'énumérer les noms de quelques uns de nos collaborateurs : MM. Barbarin, Berg-

(*) En 1880, nous avions annoncé que nous publierions annuellement 192 pages grand in-8°, soit en dix ans, 1920 pages. Nous en avons publié en réalité 3380, soit 75 p. °/₀ de plus.

106253

mans, Ph Breton, Brocard, Casey, Catalan, Cavallin. E. Cesáro, Chomé, Déprez, De Tilly, Dewulf, Fauquembergue, Gelin, Gilbert, Goedseels, Günther, Habich, Jamet, Jeřábek, Laisant, Lemoine, Le Paige, de Longchamps, Ed. Lucas, Malet, Mister, d'Ocagne, Peano, Petit-Bois, Realis, de Rocquigny, Schoentjes, Schoute, Servais. Sylvester, Teixeira, Van Aubel, Verstraeten, Vigarié, Weill, etc. La plupart de ces auteurs nous continuent leur concours bienveillant et nous avons en portefeuille des articles d'un grand nombre d'entre eux. Nous rappelons, en particulier, qu'on peut trouver dans ***Mathesis*** de nombreuses recherches sur la géométrie récente (avec un exposé méthodique de cette branche nouvelle de la science), sur les aires approchées, sur les équations différentielles linéaires, sur les transformations linéaires et quadratiques, sur les nombres parfaits, sur divers systèmes de coordonnées, sur la théorie élémentaire des fonctions d'une variable imaginaire, etc.

Les questions controversées de méthodologie mathématique ne peuvent guère être traitées dans les manuels élémentaires. C'est pourquoi nous y avons attaché une importance spéciale. Il a déjà paru, dans ***Mathesis***, des études sur la théorie élémentaire des maxima et des minima, sur l'homogénéité, sur les fractions périodiques, sur les fractions continues, sur la théorie des limites, sur les infiniment petits, sur la notion de longueur d'une courbe et d'aire d'une surface courbe, sur divers principes du calcul différentiel et de géométrie projective, etc. Nous avons touché incidemment, à propos d'articles bibliographiques, à un grand nombre d'autres points. Nous y reviendrons dans la suite. En particulier, toutes les questions qui tiennent de près ou de loin à l'emploi de l'infini en mathématiques, continueront à être examinées avec soin, afin de provoquer les réflexions de nos lecteurs et surtout de prémunir les jeunes gens contre des conceptions fausses, obscures ou arbitraires.

La moitié de chaque numéro du journal est consacrée aux solutions de ***questions proposées*** dans les livraisons antérieures. Ces questions sont extrêmement utiles pour les élèves et pour les professeurs. Les exercices contenus dans beaucoup de manuels sont insuffisants, trop peu variés

et si l'on peut ainsi dire, trop connus; on les rencontre, en effet, dans tous les recueils. En proposant de nombreuses questions nouvelles, nous avons voulu exciter l'émulation dans la jeunesse des écoles, développer le goût des recherches originales et vulgariser les *procédés particuliers de solution* qui ne se prêtent pas toujours à un enseignement régulier. Nous avons fait tout notre possible pour publier dans *Mathesis* des solutions *vraiment complètes* des questions proposées, en comparant attentivement les réponses données par nos différents collaborateurs et en les accompagnant de commentaires à la fois pédagogiques, scientifiques et bibliographiques.

Les *questions d'examen* permettent aux aspirants-élèves des écoles spéciales de juger par eux-mêmes de leurs connaissances mathématiques, de se familiariser avec les épreuves qu'ils doivent subir et de s'y préparer convenablement en abordant des problèmes peu connus. Nous insérons aussi, parmi les questions d'examen, les propositions nouvelles, suffisamment intéressantes, que nous envoient nos jeunes abonnés.

Dans la *Bibliographie*, nous avons jusqu'ici pu faire connaître à nos lecteurs, à la fois, de bons manuels destinés aux élèves, et des ouvrages dépassant le cadre des programmes officiels, mais indispensables à ceux qui veulent posséder une instruction mathématique sérieuse. Nous avons aussi publié assez d'extraits analytiques de mémoires ou d'articles pouvant intéresser nos abonnés (méthode des isopérimètres ; théorie des fonctions hyperboliques, etc.). Nous continuerons à signaler les meilleurs ouvrages mathématiques paraissant en France, en Belgique et à l'étranger, et à analyser les articles les plus remarquables des revues analogues à la nôtre.

Un programme aussi varié ne peut être réalisé dans les limites d'une seule année; mais nous comptons sur la confiance persévérante de nos abonnés. Jusqu'ici le succès n'a pas fait défaut à notre entreprise, comme le prouvent les noms de nos collaborateurs et l'accueil fait, à l'étranger, à nos articles et à nos questions. Mais il faut que ce succès soit durable, pour que nous puissions apporter à notre revue toutes les

améliorations désirables. Nous faisons donc appel au zèle de ceux qui nous ont aidés jusqu'ici et de tous ceux qui ont à cœur les progrès de l'enseignement des mathématiques. Nous leur demandons de faire connaître *Mathesis*(*) à leurs amis, à leurs collègues ou à leurs condisciples.

15 janvier 1891.

P Mansion, J. Neuberg.

(*) Un mot sur le nom et la devise de notre journal, pour nos nouveaux abonnés.

Μάθησις, en grec classique, signifie *science, doctrine;* en latin ancien, *mathesis* = astrologie et, quelquefois, *mathématiques;* en latin moderne, le dernier sens a prévalu, comme si les mathémathiques formaient la science par excellence. Le spirituel Terquem, à propos de ce nom de *Mathesis* donné aux mathématiques par les modernes cite le passage si connu de la Bible : « Dieu a tout arrangé avec nombre, poids et mesure (*Sap.*, XI, 21), » puis il fait cette remarque : « Si, dans les temps modernes, les sciences physiques ont fait des progrès si considérables, c'est qu'on a suivi, *salva venia*, la voie divine » (N. A. M., 1861, *Bull. bibl.*, p. 50).

Quant à notre devise, imitée d'Horace, elle exprime, sous une forme un peu paradoxale, la haute utilité d'une étroite alliance entre les abstractions de l'analyse et les intuitions de la géométrie.

MATHESIS

SUR LES THÉORÈMES ÉNONCÉS PAR FERMAT, EULER, WILSON, STAUDT ET CLAUSEN;

par M. Ed Lucas, professeur au lycée St Louis.

Désignons par $a, b, c, \ldots$, des nombres premiers, inégaux deux à deux. et posons

$$A = a^{\alpha},\ B = b^{\beta},\ C = c^{\gamma}, \cdots$$
$$q = ABC \ldots,$$
$$\lambda = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$$

On sait par le *théorème de Fermat généralisé*, que, s'il y a $\varphi(q)$ nombres premiers et inférieurs à q, pour tout entier x premier à q, la différence

$$x^{\varphi(q)} - 1$$

est un multiple de q, et par conséquent de A. Pour étendre cette congruence à toutes les valeurs entières de x. il suffit de multiplier par x^{α} et *à fortiori*, par x^{λ}; donc l'expression

$$x^{\lambda}(x^{\varphi(q)} - 1)$$

est un multiple de A, B, C, ...; et puisque ces nombres sont premiers entre eux deux à deux, cette expression est divisible par q pour toutes les valeurs entières de x. On a ainsi un *énoncé, plus général, du théorème de Fermat généralisé par Euler*, qui conduit à des conséquences importantes.

Supposons, par exemple, que l'on veuille calculer les restes de la division de x^n par q, en supposant $n > q$. Posons

$$n - \lambda = h\varphi(q) + r, \tag{1}$$

r désignant un entier plus petit que $\varphi(q)$. D'ailleurs, on déduit de (1) l'identité algébrique

$$x^{n-\lambda} - 1 = (x^{\varphi(q)} - 1)Q(x) + x^r - 1,$$

et en multipliant les deux membres par x^{λ},

$$x^n = x^{\lambda}(x^{\varphi(q)} - 1)Q(x) + x^{r+\lambda},$$

donc pour toute valeur entière de x, les restes des puissances

$$x^n \quad \text{et} \quad x^{r+\lambda}.$$

par q sont égaux ; il en sera de même de leurs différences successives et en particulier des restes de la division par q, de

$$\Delta^{q-1}x^n \quad \text{et} \quad \Delta^{q-1}x^{r+\lambda}.$$

Nous allons faire voir que la différence

$$\delta = q - 1 - (r + \lambda)$$

est nulle ou positive; remplaçons r par sa plus grande valeur $\varphi(q) - 1$, on a

$$\delta \geq q - \varphi(q) - \lambda.$$

Si q ne contient qu'un seul nombre premier a, alors

$$\varphi(a^\alpha) = a(a^{\alpha-1} - 1) \quad \text{et} \quad \delta \geq a^{\alpha-1} - \alpha.$$

1° Pour $\alpha = 1$, on a $\delta = 0$, et q est premier ;

2° Pour $\alpha = 2$, on a $\delta = 0$, si $a = 2$ et alors $q = 4$; mais δ est toujours positif pour $a > 2$, et $\alpha = 2$;

3° Pour $\alpha > 2$, on a toujours $\delta > 0$; il suffit de le vérifier pour la plus petite valeur 2 de a, en développant la puissance d'exposant $(\alpha - 1)$ du binôme $(1 + 1)$.

Considérons maintenant le cas général $q = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; alors on a

$$\varphi(q) = a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)(b-1)(c-1).$$

De l'identité

$$a^\alpha = a^{\alpha-1}(a-1) + a^{\alpha-1},$$

et des résultats précédents, on déduit

$$a^\alpha \geq a^{\alpha-1}(a-1) + \alpha,$$
$$b^\beta \geq b^{\beta-1}(b-1) + \beta,$$
$$c^\gamma \geq c^{\gamma-1}(c-1) + \gamma,$$

et en multipliant ces inégalités membre à membre,

$$q > \varphi(q) + \lambda,$$

puisque les coefficients de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dans le produit des seconds membres, sont au moins égaux à l'unité.

Par conséquent, δ est toujours positif pour q composé > 4 ; et par suite, les restes de la division de

$$\Delta^{q-1}x^n \quad \text{ou de} \quad \Delta^{q-1}x^{r+\lambda}$$

par q sont nuls, puisque l'exposant $(r + \lambda)$ de x est inférieur à l'ordre

des différences. Il nous reste donc à étudier les cas de $q = 4$ et de q premier, que nous remplacerons alors par p.

Pour $q = 4$, les restes des puissances de x^n, pour des valeurs entières et consécutives de x, ainsi que ceux des différences sont données dans le tableau suivant, pour n impair :

Restes de x^n :	0	1	0	3	0	1	0	3	0
» » Δx^n :	1	3	3	1	1	3	3	1	
» » $\Delta^2 x^n$:	2	0	2	0	2	0	2		
» » $\Delta^3 x^n$:	2	2	2	2	2	2			

par conséquent, les restes de $\Delta^3 x^n$ par 4 sont tous égaux à 2 pour n impair, et ceux des différences d'ordre supérieur sont nuls. On démontre de même que pour n pair, les restes de $\Delta^3 x^n$ sont tous égaux à 2 et ceux de $\Delta^2 x^n$ à 0. On déduit encore de ce tableau que les nombres Δx^n sont toujours impairs.

Enfin pour q premier et égal à p, on peut avoir $r < p - 2$ ou $r = p - 2$; dans le premier cas, n n'est pas un multiple de $(p - 1)$, alors δ n'est pas nul et par conséquent, comme pour q composé > 4, les restes de $\Delta^{p-1} x^n$ sont nuls. Mais si $r = p - 2$, on a $\delta = 0$ et par suite, il faut considérer l'expression

$$\Delta^{p-1} . x^{p-1} = 1 . 2 . 3 \ldots (p - 1);$$

donc cette différence est constante; mais par une autre formule bien connue, du calcul des différences, on a encore

$$\Delta^{p-1} 0^{p-1} = (p - 1)^{p-1} - C^1_{p-1} (p - 2)^{p-1} + \cdots - C^{p-2}_{p-1} . 1^{p-1} + 0^{p-1};$$

en remplaçant les puissances par 1, d'après le théorème de Fermat on voit donc que les restes de

$$\Delta^{p-1} . x^{p-1} \quad \text{et} \quad (1 - 1)^{p-1} - 1$$

par p sont égaux; par suite les restes de $\Delta^{p-1} x^{p-1}$ par p sont égaux à -1. En comparant ce résultat avec le précédent, on en déduit que tout nombre premier quelconque p divise $(p - 1)! + 1$; c'est précisément le *théorème de Wilson*.

En résumé, les résidus de $\Delta^{q-1} x^n$ par q sont constants et égaux à

-1, si q est un nombre premier tel que $(q - 1)$ divise n;
$+2$, si $q = 4$ et si n est impair;
0, dans tous les autres cas.

THÉORÈME DE STAUDT ET CLAUSEN(*). Si l'on désigne, pour abréger, $\Delta^n 0^n$ par Δ_n, la formule d'interpolation de Newton donne l'identité

$$x^n = x\Delta_1 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_3 + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}\Delta_n.$$

Désignons par S_n la somme des puissances d'exposant n des $(x-1)$ premiers nombres; remplaçons successivement x par $1, 2, 3, \ldots (x-1)$ dans la formule précédente. En ajoutant les égalités obtenues, par le procédé de Fermat, on trouve

$$S_n = \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_1 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_2 + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n+1)}\Delta_n.$$

Si l'on désigne par B_n le coefficient de x dans le développement de S_n, on a

$$B_n = -\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{3} - \frac{\Delta_3}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{\Delta_n}{n}.$$

Telle est l'expression des *nombres de Bernoulli* en fonction des différences de 0^n. Mais, d'après les résultats précédents, les fractions qui ne se réduisent pas à des nombres entiers sont toutes celles dont le dénominateur q est un nombre premier tel que $q-1$ divise n ou $q=4$ pour n impair; mais à l'exception de B_1, les nombres d'indice impair sont tous nuls; donc n est pair et la fraction de dénominateur 4 se réduit à un nombre entier; les autres fractions pour q premier, satisfaisant à la condition énoncée se réduisent à un entier d iminué de 1. Donc, *on a pour les nombres de Bernoulli l'expression*

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \cdots - \frac{1}{l},$$

dans laquelle A_n *désigne un nombre entier* et $2, b, c, \ldots, l$, *tous les nombres premiers qui surpassent de* 1 *tous les diviseurs de* n.

Paris, 10 janvier 1890.

(*) Voir *Mathesis*, t. III, p. 25.

NÉCROLOGIE.

J. CASEY.

Monsieur le Dr John Casey, professeur à l'Université catholique de Dublin, vient de mourir, le 3 janvier, enlevé par une bronchite aiguë.

Cette triste nouvelle nous est arrivée trop tard pour que nous puissions apprécier dans cette livraison l'œuvre de notre savant collaborateur. Qu'il nous suffise de rappeler que Casey a publié d'importants Mémoires de haute géométrie, particulièrement dans les *Transactions* de la Société royale de Londres dont il était membre effectif, et plusieurs ouvrages d'enseignement à la fois pratiques et originaux.

Dans les pays de langue anglaise, Casey était l'un des plus éminents promoteurs de la *Géométrie récente* du plan, dont il avait donné un exposé complet dans ses ouvrages classiques (*A sequel to Euclid*, *Géométrie analytique*, *Trigonométrie*), en la rattachant étroitement à la fois à la géométrie élémentaire et à la géométrie projective.

Puisse l'expression de notre vive sympathie et de nos regrets, auxquels, nous n'en doutons pas, s'associent les lecteurs de *Mathesis*, apporter quelque consolation à la douleur de sa famille !

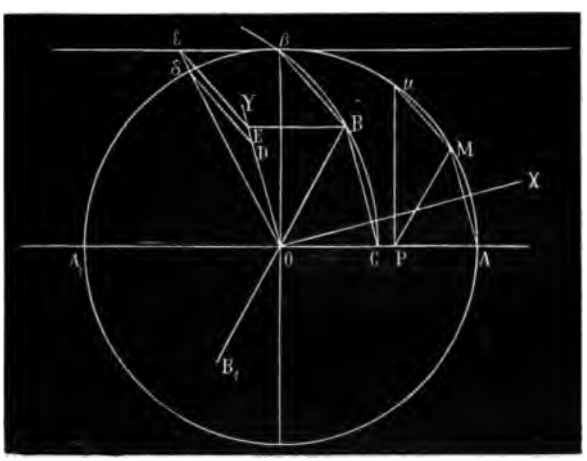
P. M. et J. N.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE;

par MADAME PRIM.

I. *Une ellipse étant déterminée par deux diamètres conjugués* AA_1, BB_1, *construire les points où la circonférence décrite sur* AA_1 *comme diamètre rencontre l'ellipse.*

Menons dans la circonférence le rayon $O\beta$ perpendiculaire à AA_1, et joignons βB. On sait qu'à chaque point M de l'ellipse correspond un point μ de la circonférence de façon que la parallèle à OB par M et la parallèle à $O\beta$ par μ se rencontrent en un point P de AA_1. Les triangles $MP\mu$, $BO\beta$ sont homothétiques et AA_1 y est sa propre homologue. Supposons maintenant que M soit le point d'intersection de l'ellipse et de la circonférence. Alors la circonférence $A\beta A_1$ étant rapportée au triangle $MP\mu$ a pour homologue, dans le triangle $BO\beta$, la circonférence passant



par B et β, et ayant son centre sur AA_1. Si donc cette dernière courbe rencontre la droite AA_1 en C, on obtiendra le point M en menant AM parallèle à CB.

II. *Trouver les axes d'une ellipse dont on donne, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués* AA_1, BB_1.

La solution de cette question résulte immédiatement de celle du problème précédent.

En effet, les cordes supplémentaires MA, MA_1 étant à angle droit, les

axes de l'ellipse sont dirigés suivant les droites OY, OX parallèles à MA, MA_1. Soit D une extrémité du premier axe, δ le point correspondant de la circonférence $A\beta A_1$. Or, la transformation au moyen de laquelle on passe de l'ellipse proposée à la circonférence $A\beta A_1$, change la droite OD en la droite $A\delta$; et l'on obtient évidemment deux points homologues E, ε de ces droites en menant BE parallèle à AA_1, et $E\varepsilon$, $\beta\varepsilon$ parallèles à $B\beta$, AA_1. La droite $O\varepsilon$ coupe donc la circonférence ABA_1 en un point δ, par lequel il suffit de mener une parallèle δD à βB.

III. *Étant donnée une ellipse* E *rapportée à deux diamètres conjugués* AA_1, BB_1, *on mène par un point quelconque* M *de cette courbe des parallèles à* AA_1, BB_1 *et terminées, respectivement, en* Q, P *aux droites* BB_1, AA_1. *Trouver l'enveloppe de l'ellipse* ε, *qui a pour demi-diamètres conjugués* OP et OQ, O *désignant le centre de* E.

Si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, les coordonnées de M sont de la forme $OP = a\cos t$, $OQ = b\sin t$, et l'équation de ε est

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2 t} + \frac{y^2}{b^2\sin^2 t} = 1,$$

ou

$$\sin^4 t + \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\sin^2 t + \frac{y^2}{b^2} = 0. \qquad (1)$$

Considérons $\sin^2 t$ comme un paramètre variable; alors l'équation de l'enveloppe de ε s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'équation (1). On trouve

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \pm 1;$$

l'enveloppe se compose donc des quatre droites AB, A_1B, AB_1, A_1B_1.

IV. *Étant donné un ellipsoïde* E *rapporté à trois diamètres conjugués* AA_1, BB_1, CC_1, *on mène par un point quelconque* M *de cette surface des plans parallèles aux plans* BOC, COA, OAB *et rencontrant* OA, OB, OC *aux points* P, Q, R. *Trouver l'enveloppe de l'ellipsoïde* ε *dont* OP, OQ, OR *sont un système de trois demi-diamètres conjugués.*

On peut représenter les coordonnées de M par $(a\cos\alpha, b\cos\beta, c\cos\gamma)$, sous la condition

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

l'ellipsoïde ε a donc pour équation

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\alpha}+\frac{y^2}{b^2\cos^2\beta}+\frac{z^2}{c^2\cos^2\gamma}=1.$$

Celle-ci est vérifiée par les valeurs

$$x=\pm a\cos^2\alpha,\quad y=\pm b\cos^2\beta,\quad z=\pm c\cos^2\gamma. \tag{2}$$

Le plan tangent au point qui a pour coordonnées les expressions (2), a pour équation

$$\pm\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=1. \tag{3}$$

Comme il est indépendant de α, β, γ, l'ellipsoïde ε a pour enveloppe les huit plans représentés par l'égalité (3), c'est-à-dire les plans ABC, ABC_1, A_1BC, etc.

Remarque. L'enveloppe proprement dite se compose de huit *portions* de plans limitées par les triangles ABC, ABC_1, ... cependant, on peut même admettre ces plans *indéfinis* comme constituant l'enveloppe cherchée, pourvu que l'on considère également certains hyperboloïdes, que nous allons définir. Remplaçons l'ellipsoïde E par l'hyperboloïde E′ dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

désignons par a', b', c' les coordonnées d'un point M′ de E′ et prenons sur OA, OB, OC les longueurs $OP'=a'$, $OQ'=b'$, $OR'=c'$; enfin, construisons l'hyperboloïde ε' qui a pour demi-diamètres conjugués OP′, OQ′, OR′, dont les deux premiers sont transverses et le troisième imaginaire. L'enveloppe de ε' est encore constituée par certaines portions des plans ABC, ABC_1, etc. Le lecteur voit facilement qu'il y a encore à considérer d'autres hyperboloïdes analogues à ε'.

V. *Étant donnée une surface s rapportée à trois axes* OX, OY, OZ, *on déduit, de chaque point m de cette surface ayant pour coordonnées x, y, z, un autre point* M *dont les coordonnées* X, Y, Z *résultent des égalités*

$$X=x,\quad Y=y+kx,\quad Z=z+lx, \tag{4}$$

k et l étant des constantes. Connaissant le plan tangent au point m de la surface s, trouver le plan tangent au point M *de la surface* S, *lieu de* M.

Nous pouvons représenter S et s par les équations

$$f(X, Y, Z) = 0, \quad f(x, y + kx, z + lx) \equiv \varphi(x, y, z) = 0$$

et les plans tangents aux points M, m par les équations

$$(\alpha - X)\frac{df(X,Y,Z)}{dX} + (\beta - Y)\frac{df(X,Y,Z)}{dY} + (\gamma - Z)\frac{df(X,Y,Z)}{dZ} = 0, \quad (5)$$

$$(\alpha - x)\frac{d\varphi(x,y,z)}{dx} + (\beta - y)\frac{d\varphi(x,y,z)}{dy} + (\gamma - z)\frac{d\varphi(x,y,z)}{dz} = 0. \quad (6)$$

En vertu des relations (4), les équations (5) et (6) prennent la forme

$$(\alpha - x)\frac{df}{dX} + (\beta - y - kx)\frac{df}{dY} + (\gamma - z - lx)\frac{df}{dZ} = 0,$$

$$(\alpha - x)\left(\frac{df}{dX} + k\frac{df}{dY} + l\frac{df}{dZ}\right) + (\beta - y)\frac{df}{dY} + (\gamma - z)\frac{df}{dZ} = 0,$$

f étant mis pour $f(X, Y, Z)$. En y faisant $\alpha = 0$, on trouve la même équation. Donc les deux plans tangents se coupent sur le plan YZ, ce qui permet de les déduire l'un de l'autre.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Arithmétique élémentaire par C. BERGMANS, professeur à l'Athénée royal de Gand, chargé de cours à l'École normale des Sciences annexée à l'Université de la même ville. Mons, Hector Manceaux, 1890 (in 8° cartonné, VIII-263 pages).

Le nouveau livre de M. Bergmans fait suite à son *Précis d'Arithmétique*, petit ouvrage excellent destiné aux élèves de septième et de sixième. A cause de cette circonstance, l'auteur a pu rédiger d'une façon plus concise la partie élémentaire du nouveau traité et condenser ainsi, en une bonne centaine de pages, les théories inscrites au programme des Athénées belges.

La rigueur des raisonnements et la correction du langage sont les qualités essentielles d'un ouvrage destiné à l'enseignement. Le *Traité d'Arithmétique* les possède; M. Bergmans s'y révèle comme professeur, comme érudit et comme lettré.

Nous ferons toutefois quelques observations critiques sur des points secondaires. Certaines règles nous semblent démontrées d'une façon trop laconique; en outre nous n'aimons guère l'emploi des petits caractères pour les démonstrations : les élèves seront enclins à les considérer comme peu importantes. Enfin, tout en reconnaissant que la matière est bien subdivisée, nous craignons que l'usage trop fréquent de titres et de sous-titres ne finisse par nuire à la clarté.

Ces réserves faites, nous aurions à rendre hommage au mérite du *Traité d'Arithmétique* qui est avant tout une œuvre originale : l'auteur n'a pas hésité à sortir de l'ancienne ornière et les innovations sont nombreuses, soit dans les règles, soit dans la marche adoptée pour l'exposé des théories. Ainsi la numération des nombres entiers et celle des nombres fractionnaires sont traitées en même temps. De cette façon, on peut, dès le début, énoncer les conventions qui permettent de donner une définition générale de la multiplication. Le multiplicateur s'écrit avant le multiplicande et devient ainsi un véritable coefficient (le signe × s'énonce « fois »). L'élévation aux puissances et l'extraction des racines sont rangées parmi les opérations fondamentales, etc. On peut, sans doute, être adversaire de ces réformes et préférer l'ancien système ; on n'en sera pas moins heureux de trouver un traité qui n'a pas été jeté dans le moule invariable d'où sont sorties tant d'œuvres banales.

La partie théorique est suivie d'un bon recueil de problèmes.

Quelques questions spéciales telles que les différents systèmes de numération, la théorie élémentaire des congruences, etc. sont traitées en appendice Nous voudrions voir figurer à cet endroit ou même dans le corps de l'ouvrage, un exposé général des caractères de divisibilité et une théorie des fractions périodiques basée sur la méthode des limites, au lieu de trouver ces questions reléguées dans les notes à la fin du volume.

Une grande partie de l'intérêt du livre réside dans ces notes ; il y a là quelques pages qui représentent une somme considérable de travail et qui contiennent une foule de renseignements curieux. Un grand nombre de publications scientifiques ont éte consciencieusement passées en revue et, si cette partie du *Traité* n'est pas d'une utilité immédiate pour les élèves, elle sera lue avec plaisir par tous les professeurs.

Au point de vue matériel, le volume est bien soigné, sauf quelques imperfections de détail qui disparaitront, sans doute, à la seconde édition.

Nous donnons ci-après le sommaire des matières traitées :

PRÉFACE. Notions préliminaires

LIVRE I. *Numération*. Formation des nombres entiers et fractionnaires. Numération.

LIVRE II. *Calcul et théorie des nombres*. Opérations fondamentales sur les nombres entiers : addition, soustraction, multiplication, division, extraction des racines. Nombres premiers, plus grand commun diviseur. Caractères de divisibilité Décomposition en facteurs. Moindre multiple. Fractions ordinaires : transformations et opérations fondamentales. Généralisation de la théorie des fractions. Fractions décimales. Conversion des fractions ; fractions périodiques. Nombres complexes.

LIVRE III. *Rapport et proportions* (avec applications).

LIVRE IV. *Problèmes d'application*. Intérêt ; escompte ; échéance commune ; rentes sur l'état ; caisse d'épargne ; questions diverses. Mélanges et alliage. Problèmes relatifs à la géographie, à la cosmographie, à la chimie, à la physique, aux sciences juridiques, etc. Questions proposées dans les concours.

APPENDICE (cent pages). I. Systèmes de numération; en particulier, système de Cauchy avec des nombres négatifs. II. Numération des Grecs et des Romains. III. Théorie élémentaire des congruences; application aux preuves des opérations. IV. Système métrique. Anciennes mesures belges. Mesures hollandaises, anglaises, allemandes. Calendrier. V. Machines à calcul; règles à calcul; calcul par le trait. Tables de calculs faits; bâtons de Néper; cercle à calcul. VI Vocabulaire étymologique.

NOTES. Ces notes, au nombre de 34, renferment une foule de renseignements historiques et scientifiques très intéressants : n. 8. Méthodes abrégées pour la multiplication; n. 9, pour l'élévation au carré; n. 14, pour la division; n. 16, pour la racine carrée; n. 17, pour la racine cubique; n. 21, caractères de divisibilité (avec une notice sur Mondeux et les autres calculateurs-prodiges); n. 24, les nombres parfaits; n. 32, problèmes curieux; n. 34, mesures grecques et romaines.

(M. STUYVAERT.)

SUR LE TERME COMPLÉMENTAIRE DE LA SÉRIE DE TAYLOR;

par M. M D'OCAGNE, ingénieur des ponts et chaussées.

Soit $f(x)$ une fonction ayant une dérivée d'ordre $n+1$, finie et déterminée dans l'intervalle de x_0 à x_0+h. Posons

$$(1) \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0) + R,$$

et cherchons l'expression du terme complémentaire R. Remarquant que ce terme doit s'annuler en même temps que h, on peut écrire

$$R = P\,[f^n(x_0+h) - f^n(x_0)].$$

Pour déterminer P nous formerons la fonction

$$F(x) = f(x_1) - \left[f(x) + (x_1-x)f'(x) + \cdots + \frac{(x_1-x)^n}{n!}f^n(x)\right] - P[f^n(x_1) - f^n(x)],$$

où $x_1 = x_0 + h$ et où P a une valeur constante égale à celle qu'il s'agit de déterminer.

La fonction $f^{n+1}(x)$ étant finie et déterminée dans l'intervalle de x_0 à x_1, les fonctions $f^n(x), f^{n-1}(x), \ldots, f'(x), f(x)$ sont continues dans cet intervalle; par suite, il en est de même de la fonction $F(x)$; comme

d'ailleurs cette fonction s'annule pour $x = x_0$ par hypothèse, et pour $x = x_1$, identiquement, il en résulte, d'après le théorème de M. Bonnet(*), que sa dérivée s'annule pour une valeur de x intermédiaire entre x_0 et x_1. Or, cette dérivée est donnée par

$$F'(x) = -f^{n+1}(x)\left[\frac{(x_1 - x)^n}{n!} - P\right].$$

Si donc nous supposons que la dérivée $f^{n+1}(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle de x_0 à x_1, nous voyons que l'on doit avoir

$$\frac{(\theta h)^n}{n!} - P = 0, \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

Par suite, d'après (1),

$$R = \frac{(\theta h)^n}{n!}[f^n(x_0 + h) - f^n(x_0)]. \tag{2}$$

Si on remplace x_0 par 0 et h par x, on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \frac{(\theta x)^n}{n!}[f^n(x) - f^n(0)]. \tag{6}$$

Comme $\frac{x^n}{n!}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment, on voit que si la limite de $f^n(x) - f^n(0)$ est finie, le terme complémentaire tend vers zéro. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, à partir d'un certain rang, aucune des dérivées de $f(x)$ ne s'annule entre 0 et x, et si la limite de $f^n(x) - f^n(0)$ est finie lorsque n croit indéfiniment, la fonction $f(x)$ est développable, pour la valeur de x considérée, par la formule de Maclaurin.

La réciproque n'est pas vraie. La condition énoncée est, en effet, suffisante, mais nullement nécessaire.

(*) Ou plutôt de Rolle. Cauchy, le premier a démontré rigoureusement ce théorème. Serret en a donné, en l'attribuant à M. Bonnet, une démonstration incomplète (P. M.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 575.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 148.)

On donne deux cercles Δ, Δ' ***qui se coupent aux points*** O, Q ; ***on mène par*** O ***une transversale qui coupe l'un des cercles en*** M, ***l'autre en*** M'. ***Soit*** P ***le conjugué harmonique de*** O ***par rapport à*** MM'. ***Démontrer que, quand la transversale tourne autour de*** O, ***le point*** P ***décrit une strophoïde dont le point double est en*** O. ***Déterminer les cercles osculateurs en*** O.

(DEWULF.)

Solution par MM. MEURICE, MANDART *et* LIÉNARD. Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant placé en O. Soient m, m', p, q les inverses des points M, M', P, Q ; les cercles Δ, Δ' se transforment en deux droites δ, δ' passant par q, et comme

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}\right),$$

on a

$$Op = \frac{1}{2}(Om + Om').$$

Donc le lieu de p s'obtient en prenant les milieux des segments que deux droites fixes δ, δ' interceptent sur les droites menées par O. Soient μ, μ' les milieux de qm, qm' ; les points m, m' engendrant deux ponctuelles projectives, il en est de même des points μ, μ', et les droites μp, $\mu' p$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs dont les sommets sont à l'infini sur δ, δ'. Il résulte de là que p décrit une hyperbole (H) passant par q, O, ayant ses asymptotes parallèles à δ, δ' et pour centre le milieu de qO.

Le lieu de P est l'inverse de (H) par rapport à O. C'est donc une cubique ayant un point double au point O, transformé des points de (H) situés à l'infini sur δ, δ' ; les tangentes en ce point sont, évidemment, parallèles à δ, δ', et se confondent, par conséquent, avec les tangentes aux cercles Δ, Δ'. Les cercles osculateurs en O sont les inverses des asymptotes de (H) ; leurs rayons sont donc doubles de ceux de Δ, Δ'.

Si les cercles Δ, Δ' se coupent à angle droit, le lieu de P est une

strophoïde de Quetelet : s'ils se touchent en O, le lieu est une circonférence.

Note. M. Servais arrive aux mêmes résultats en observant que le lieu de P est la transformée birationnelle quadratique de troisième espèce du cercle Δ', le pôle étant en O et le cercle Δ étant la conique fondamentale de la transformation. Notre honorable correspondant donne aussi la construction de la tangente et du cercle osculateur au point P : 1° Si M_1, M'_1, P_1 sont les positions des points M, M', P sur une seconde sécante menée par O, les droites MM_1, $M_1M'_1$, PP_1 concourent en un même point, car $(OMM'P) = (OM_1M'_1P_1)$; il en résulte que les tangentes menées en M, M', P aux lieux décrits par ces points concourent en un même point. 2° Si $\frac{1}{\rho} = \varphi(\omega)$ est l'équation d'une courbe en coordonnées polaires (ρ, ω), le rayon de courbure r est donné par la formule

$$r = \frac{1}{\varphi(\omega) + \varphi''(\omega)} \cdot \frac{1}{\sin^3 u},$$

u désignant l'angle de la tangente avec le rayon vecteur.

Or, entre les rayons vecteurs ρ, ρ_1, ρ_2 des courbes décrites par les points P, M, M', on a la relation

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2},$$

d'où l'on déduit la relation entre les rayons de courbure :

$$\frac{2}{r \sin^3 u} = \frac{1}{r_1 \sin^3 u_1} + \frac{1}{r_2 \sin^3 u_2}.$$

M. Déprez traite la question plus générale où les circonférences Δ, Δ' sont remplacées par les coniques

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0, \quad A'y^2 + \cdots + E'x = 0;$$

en passant par les coordonnées polaires, il trouve pour le lieu de P,

$$\frac{2}{\rho} = -\frac{A \sin^2 \omega + 2B \sin \omega \cos \omega + C \cos^2 \omega}{D \sin \omega + E \cos \omega} - \frac{A' \sin^2 \omega + \cdots}{D' \sin \omega + E' \cos \omega},$$

et en repassant aux coordonnées rectangulaires,

$$(Ay^2 + 2Bxy + Cx^2)(D'y + E'x) + (A'y^2 + 2B'xy + C'x^2)(Dy + Ex) + 2(D'y + E'x)(Dy + Ex) = 0.$$

×Question 605.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 56 et t. X, p. 176.)

Les constantes A, B, C *étant données, déterminer* A_1, B_1, C_1 *de façon que l'expression*

$$P=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fonction rationnelle en x. *A quelle condition le problème est-il possible? Les constantes* a, b, c *sont supposées différentes.*

Solution d'après MM. Ch. Lavallée-Poussin *et* Vladimirescu. Posons

$$A_1=\alpha^2,\quad B_1=\beta^2,\quad C_1=\gamma^2.$$

On aura évidemment

$$\sqrt{P}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}.$$

En élevant au carré, on trouve dans P les doubles produits

$$\frac{2\alpha\beta}{(x-a)(x-b)}=\frac{2\alpha\beta}{b-a}\left\{\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right\},$$

$$\frac{2\beta\gamma}{(x-b)(x-c)}=\frac{2\beta\gamma}{c-b}\left\{\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-b}\right\},$$

$$\frac{2\gamma\alpha}{(x-c)(x-a)}=\frac{2\gamma\alpha}{a-c}\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-c}\right\}.$$

On devra donc avoir

$$\frac{2\gamma\alpha}{a-c}-\frac{2\alpha\beta}{b-a}=A,\quad \frac{2\alpha\beta}{b-a}-\frac{2\beta\gamma}{c-b}=B,\quad \frac{2\beta\gamma}{c-b}-\frac{2\gamma\alpha}{a-c}=C$$

Si l'on ajoute entre elles ces équations, on trouve

$$A+B+C=0.$$

C'est la condition qui doit être remplie pour que le problème soit possible; si elle est vérifiée, la question admettra une infinité de solutions. En effet, posons

$$2\frac{\beta\gamma}{c-b}=p,\quad 2\frac{\gamma\alpha}{a-c}=q,\quad 2\frac{\alpha\beta}{b-a}=r.$$

On en conclura

$$\alpha^2 = A_1 = \frac{1}{2}\frac{(a-c)(b-a)}{c-b}\frac{qr}{p}, \quad \beta^2 = B_1 = \frac{1}{2}\frac{(b-a)(c-b)}{a-c}\frac{rp}{q},$$

$$\gamma^2 = C_1 = \frac{1}{2}\frac{(c-b)(a-c)}{b-c}\frac{qp}{r},$$

p, q, r satisfaisant aux équations

$$q-r = A, \quad r-p = B, \quad p-q = C.$$

Il n'y a là que deux équations distinctes; nous pouvons introduire une quantité arbitraire $K = p+q+r$. On a alors

$$p = \tfrac{1}{2}(K+C-B), \quad q = \tfrac{1}{2}(K+A-C), \quad r = \tfrac{1}{2}(K+B-A).$$

Ces valeurs reportées ci-dessus donnent les valeurs de A_1, B_1, C_1 en fonction d'une quantité arbitraire K.

Question 680.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 72.)

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ *des quantités positives quelconques;* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{n-1}$ *des quantités positives ou négatives dont la valeur absolue est au plus égale à l'unité Démontrer que le déterminant*

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -\lambda_1 a_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -\lambda_1 a_1 & a_1+a_2 & -\lambda_2 a_2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 a_2 & a_2+a_3 & -\lambda_3 a_3 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{n-2}+a_{n-1} & -\lambda_{n-1}a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -\lambda_{n-1}a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

est nécessairement positif. (Novarese.)

Solution d'après MM. E. Baudran *et* Lalisse. Je développe D_n suivant les éléments de la dernière ligne : il vient

$$D_n = (a_{n-1}+a_n)D_{n-1} - \lambda_{n-1}^2 a_{n-1}^2 D_{n-2}$$
$$= a_n D_{n-1} + a_{n-1}(D_{n-1} - \lambda_{n-1}^2 a_{n-1} D_{n-2}).$$

Donc, si

$$D_{n-1} > 0 \text{ et } D_{n-1} > a_{n-1}D_{n-2},$$

il s'ensuit

$$D_n > 0 \text{ et } D_n > a_n D_{n-1}.$$

Or

$$D_1 = a_0 + a_1, \text{ c'est-à-dire } D_1 > 0,$$

$$D_2 = (a_0 + a_1)(a_1 + a_2) - \lambda_1^2 a_1^2$$

$$= a_2 D_1 + a_1 (a_0 + a_1 - \lambda_1^2 a_1), \text{ c'est-à-dire } D_2 \begin{matrix} \geq 0 \\ > a_2 D_1 \end{matrix};$$

donc, etc.

Il va sans dire que la proposition subsiste si l'on écrit partout λ_i au lieu de $-\lambda_i$.

Autre solution par M. Sohie. M. E. Cesáro nous a envoyé une généralisation de la question 680 que nous espérons publier ultérieurement.

×Question 688.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 152.)

On donne le système

$$a \sin(x-\alpha)\sin(y-z) + b\sin(y-\beta)\sin(z-x) + c\sin(z-\gamma)\sin(x-y) = 0,$$
$$a\cos(x-\alpha)\sin(y-z) + b\cos(y-\beta)\sin(z-x) + c\cos(z-\gamma)\sin(x-y) = 0.$$

En déduire les valeurs de $y-z$, $z-x$, $x-y$. (J. Neuberg.)

Solution par MM. Joachimescu (Bucharest), Lalisse, Cristesco, Decamps (Piéton), de Strékalof (St-Pétersbourg) Ch. de la Vallée-Poussin et Denys (Avesnes). Les équations proposées sont homogènes par rapport aux quantités $a \sin(y-z)$, $b \sin(z-x)$, $c \sin(x-y)$; donc celles-ci sont proportionnelles aux déterminants formés avec les éléments

$$\left\| \begin{matrix} \sin(x-\alpha), & \sin(y-\beta), & \sin(z-\gamma) \\ \cos(x-\alpha), & \cos(y-\beta), & \cos(z-\gamma) \end{matrix} \right\|$$

et l'on peut écrire, λ étant un facteur de proportionnalité,

$$\lambda a \sin(y-z) = \sin(y-\beta)\cos(z-\gamma) - \cos(y-\beta)\sin(z-\gamma)$$
$$= \sin(y-\beta-z+\gamma), \text{ etc.} \qquad (1)$$

Posons

$$y-z = X, \quad z-x = Y, \quad x-y = Z,$$
$$\beta-\gamma = A, \quad \gamma-\alpha = B, \quad \alpha-\beta = C;$$

les équations (1) prennent la forme

$$\lambda a \sin X = \sin(X-A) = \sin X \cos A - \cos X \sin A, \text{ etc.}$$

ou

$$\cot X = \cot A - \lambda a \operatorname{cosec} A, \text{ etc.}$$

Pour déterminer λ, observons que les égalités

$$X + Y + Z = 0, \quad A + B + C = 0,$$

entraînent

$$\Sigma \cot Y \cot Z = 1, \quad \Sigma \cot B \cot C = 1.$$

Il résulte de là que

$$\Sigma (\cot B - \lambda b \operatorname{cosec} B)(\cot C - \lambda c \operatorname{cosec} C) = 1,$$

donc

$$\lambda = \frac{\Sigma a \operatorname{cosec} A (\cot B + \cot C)}{\Sigma bc \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C} = -\frac{\Sigma a \sin A}{\Sigma bc \sin A}.$$

Remarque I. D'après les égalités (1), le triangle construit avec les côtés $a \sin(y-z)$, $b \sin(z-x)$, $c \sin(x-y)$ a pour angles

$$\pi - (y - z + \gamma - \beta), \quad \pi - (z - x + \alpha - \gamma), \quad (y - x + \alpha - \beta) - \pi.$$

(Denys.)

Remarque II. Menons trois droites OA, OB, OC faisant avec un axe ζ les angles α, β, γ, et prenons les longueurs OA, OB, OC égales à a, b, c. Je dis que les inclinaisons x, y, z de BC, CA, AB sur l'axe ζ vérifient les équations proposées. En effet, on a l'équipollence

$$OA \cdot BC + OB \cdot CA + OC \cdot AB = 0. \qquad (A)$$

Mais

$$OA = a\varepsilon^{-\alpha}, \quad OB = b\varepsilon^{-\beta}, \quad OC = c\varepsilon^{-\gamma};$$

les longueurs BC, CA, AB étant proportionnelles aux sinus des angles du triangle ABC, on peut écrire

$$BC = \mu \sin(y-z)\varepsilon^{x}, \quad CA = a \sin(z-x)\varepsilon^{y}, \quad AB = \mu \sin(x-y)\varepsilon^{z}.$$

Par conséquent, l'équipollence (A) prend la forme

$$a \sin(y-z)\varepsilon^{x-\alpha} + b \sin(\alpha - x)\varepsilon^{y-\beta} + c \sin(x-y)\varepsilon^{z-\gamma} = 0,$$

et donne, par dédoublement, les deux équations proposées. (Laisant.)

Autres solutions partielles ou complètes par MM. Cristesco, Decamps, Lalisse.

×Question 694.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 216.)

Chercher le minimum de la bissectrice d'un des angles aigus d'un triangle rectangle dont la hauteur relative à l'hypoténuse est donnée. (Cl. Thiry)

Solution par MM. Decamps, Brocard, Cristesco, Lalisse, Russo, E. Baudran, Denys, de Bözóky, Brandza, M^lle^ Pompilianu, Ch. de la Vallée-Poussin, Déprez *et* Vladimirescu (Bucharest). Si h est la hau-

teur donnée du triangle ABC rectangle en A, la bissectrice x de l'angle B a pour expression

$$x = \frac{AB}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{h}{\sin B \cos\frac{B}{2}}.$$

Le minimum de x correspond donc au maximum du produit

$$\sin^2 B \cos^2\frac{B}{2} = 4 \sin^2\frac{B}{2}\cos^4\frac{B}{2} = 4 \sin^2\frac{B}{2}\left(1 - \sin^2\frac{B}{2}\right)^2;$$

les facteurs

$$\sin^2\frac{B}{2}, \quad 1 - \sin^2\frac{B}{2}$$

ayant une somme constante, doivent être proportionnels à leurs exposants. On a donc

$$\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{1} = \frac{1 - \sin^2\frac{B}{2}}{2}, \quad \sin\frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad B = 70°31'40'', \quad x = \frac{3}{4}h\sqrt{3}.$$

Seconde solution par M. VLADIMIRESCU. — On a encore

$$\cos B = \frac{1}{3}, \quad AB = \frac{1}{3}BC.$$

L'angle cherché B est la mesure du dièdre du tétraèdre régulier. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

466. Les côtés d'un triangle forment une progression arithmétique, ayant pour raison le quart du rayon r du cercle inscrit. Exprimer ces côtés en fonction de r.

On peut représenter ces côtés par $x - \frac{1}{4}r$, x, $x + \frac{1}{4}r$. Substituons-les dans la formule

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

il vient $x = \frac{7r}{2}$.

Si la raison de la progression est kr, le côté moyen du triangle est $2r\sqrt{k^2+3}$.

467. Démontrer que

$$2(a + \sqrt{a^2+b^2})(b + \sqrt{a^2+b^2}) = (a + b + \sqrt{a^2+b^2})^2.$$

408. Résoudre le système

$$\frac{a^2}{5y}+\frac{4}{20x}=\frac{a}{xy},\quad 3ax-a=\frac{2y^2-2y}{y-1}.$$

(École des Beaux-Arts, Paris, 1890.)

Solutions

$$y=1,\quad x=\frac{5a-1}{a^2};\quad x=\frac{11}{2a+3},\quad y=\frac{v(15-a)}{2a+3},$$

QUESTIONS PROPOSÉES(*).

17. (Voir *Mathesis*, (1) I, p. 30). Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles, les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c)-A(x-a)-B(x-b)-C(x-c)=0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.

95. (Voir *Mathesis*, (1) I, p. 206). Trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gxz+2hxy+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0.$$

252. (Voir *Mathesis*, (1) III, p. 143). I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^q-B^q=0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s=B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p+2^pB_p-2B_p=0.\qquad\text{(Éd. Lucas.)}$$

267. (Voir *Mathesis*, (1) III, p. 192). On a

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^5}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots=$$

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^3}+\cdots$$

(E. Catalan.)

(*) Nous réimprimons ici, en tête de la deuxième série de *Mathesis*, toutes les questions de la première série dont nous n'avons pas encore reçu de solution complète.

×**382.** (Voir *Mathesis*, (1) IV, p. 119). On peut décomposer un polygone de $m = (p-2)n + 2$ côtés, en n polygones de p côtés de

$$\frac{(np-n)(np-n-1)\ldots(np-2n+2)}{1.2.3\ldots n}$$

manières différentes. (H. M. Taylor et R. C. Rowe.)

×**383.** (Voir *Mathesis*, (1) IV, p. 231). On partage une demi-circonférence en n parties égales, et l'on joint les points de division à l'une des extrémités de la demi-circonférence. Démontrer que la somme des produits p à p des carrés des cordes, ainsi obtenues, égale autant de fois la $2p^{ième}$ puissance du rayon, qu'il y a de manières de combiner $2n-p-1$ objets, p à p(*). (E. Cesaro.)

387. (Voir *Mathesis*, (1) IV, p. 231). 1° Ayant posé

$$u_p = \frac{\sin 2nx \,.\, \sin(2n-1)x \,.\,\ldots \sin(2n-p+1)x}{\sin x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin 3x \ldots \sin px},$$

démontrer l'identité

$$1 - u_2^1 + u_2^2 - u_3^2 + \cdots + u_{2n}^2 = (-1)^n \cdot \frac{\sin(2n+2)x \,.\, \sin(2n+4)x \ldots \sin 4nx}{\sin 2x \,.\, \sin 4x \,.\, \sin 6x \ldots \sin 2nx}.$$

2° Si v_p est le coefficient de x^{2n} dans le développement de u_p. on a

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots = -1.9.25\ldots(2n-1)^2$$ (E. Cesáro.)

La première partie a été résolue t. VI, p. 129.

411. (Voir *Mathesis* (1) V, p. 23). Soient OA, OB, OC trois demi-diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, et soient OA′, OB′, OC′ les demi-diamètres perpendiculaires aux plans BOC, COA, AOB. Trouver, entre OA′, OB′, OC′ des relations analogues aux théorèmes d'Apollonius. (J. Neuberg.)

412. (Voir *Mathesis*, (1) V, p. 23). Démontrer l'identité suivante

$$\frac{m^p}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots p)} =$$

$$\mathrm{S}\frac{1}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots\beta)\ldots(1.2.3\ldots\gamma).2^{\gamma}(2.3)^{\delta}\ldots(2.3\ldots p)^{\lambda}}$$

le signe S portant sur toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des quantités $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ qui vérifient les 2 équations simultanées

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = m.$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \cdots + p\lambda = p.$$ (Weill.)

(*) Voir Question 262, *proposée*, t. III, p. 160 résolue, t. IV, p. 41.

×**497**. (Voir *Mathesis*, (1) V, p. 280). Soient

$$A = \frac{a}{(b-c)(b-d)(c-d)}, \quad B = \frac{b}{(a-c)(a-d)(c-d)}$$

$$C = \frac{c}{(a-b)(a-d)(b-d)}, \quad D = \frac{d}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

On a

$$(A - B + C - D)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right) = 4^2. \quad \text{(P. A. Mac Mahon.)}$$

505. (Voir *Mathesis*, (1) IX, p. 194) Démontrer les relations

1° $C_{n,1} - C_{n,2}C_{3,2} + C_{n,3}C_{4,2} - C_{n,4}C_{5,2} + \cdots \pm C_{n,n}C_{n+1,2} = 0.$

2° $$\frac{1}{2p+1}C_{2p,p} + \frac{1}{2p-1}C_{2,1}C_{2p-2,p-1} + \frac{1}{2p-3}C_{4,2}C_{2p-4,p-2} + \cdots + C_{2p,p} = 4^p \frac{2.4.6\ldots 2p}{3.5.7\ldots(2p+1)}.$$

La première partie a été résolue t. IX, p. 194. (E. Catalan.)

×**513**. (Voir *Mathesis*, (1) VI, p. 71). Vérifier l'identité

$$8^n \Sigma_{p=0}\left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,p}]^2 C_{n,2p} = \Sigma_{p=0} \frac{(C_{2n-2p,np}\, C_{2p,p})^2}{C_{n,p}}. \quad \text{(E. Catalan.)}$$

519. (Voir *Mathesis*, (1) VI, 119.) Si les équations

$$f(x) - x = 0, \quad f[f(x)] - x = 0,$$

ont une racine commune qui soit racine simple de la première et racine multiple de la seconde, l'ordre de multiplicité est impair (Moutard.)

532. (Voir *Mathesis*, (1) VI, p. 192). Soient u, v, w,... les facteurs *premiers* de n, supérieurs à 2. Le nombre des *nombres triangulaires*, premiers avec n, inférieurs à $2n(n+1)$, est

$$n\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)\left(1 - \frac{2}{w}\right)\cdots$$

ou bien le double de ce nombre suivant que n est *pair* ou *impair*.

(E. Cesáro.)

×**571**. (Voir *Mathesis*, (1) VII, p, 126). Soit $P_n = x^{2k} - x^k + 1$, k étant égal à 2^{n-1}. 1° Les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont premiers entre eux, deux à deux. 2° Dans le produit $P = P_1 P_2 .. P_n$, ordonné suivant les puissances de x, les coefficients sont $+1$, -1 ou zéro. 3° La variable x étant moindre que l'unité, on a, quand n croît indéfiniment :

$$(1 + x + x^2) \lim P = 1. \quad \text{(E. Catalan.)}$$

594. (Voir *Mathesis*, (1) VII, p 264). Discuter le système d'équations :

$$A\cos x\cos y+B\sin x\sin y+C(\cos x+\cos y)+D(\sin x+\sin y)+E=0$$
$$A\cos y\cos z+B\sin y\sin z+C(\cos y+\cos z)+D(\sin y+\sin z)+E=0$$
$$A\cos z\cos x+B\sin z\sin x+C(\cos z+\cos x)+D(\sin z+\sin x)+E=0.$$

598. (Voir *Mathesis* (1) VII, p. 280). Ayant posé

$$\alpha_1=A\alpha+B\beta+C\gamma,\quad \beta_1=A'\alpha+B'\beta+C\gamma',\quad \gamma_1=A''\alpha+B''\beta+C''\gamma;$$
$$\alpha_2=A\alpha_1+B\beta_1+C\gamma_1,\quad \beta_2=A'\alpha_1+B'\beta_1+C'\gamma_1,\quad \gamma_2=A''\alpha_1+B''\beta_1+C''\gamma_1;$$
$$\alpha_3=A\alpha_2+B\beta_2+C\gamma_2,\text{ etc.};\quad \alpha_4=A\alpha_3+B\beta_3+C\gamma_3,\text{ etc.}$$

on demande comment doivent être les coefficients A, B, C, A', ... pour que

$$\frac{\alpha_n}{\alpha}=\frac{\beta_n}{\beta}=\frac{\gamma_n}{\gamma}\ (*).$$ (E. Lemoine.)

×**635.** (Voir *Mathesis*, (1) VIII, p. 279). 1° Si deux triangles ABC, A'B'C' sont doublement orthologiques, ils le sont triplement.

2° Construire deux triangles ABC, A'B'C' qui soient triplement homologiques et triplement orthologiques.

Nous disons que ABC et A'B'C' sont *orthologiques*, si les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B'C', C'A', A'B' (ou sur C'A', A'B', B'C', ou encore sur A'B', B'C', C'A') concourent en un même point; on sait qu'alors les perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur BC, CA, AB concourent également. (E. Lemoine.)

Sur les triangles qui admettent plusieurs centres d'homologie, on peut consulter : *Mathematische Annalen*, t II, pp. 540 et 553 (Rosanes, Schröter); *Archives de Grunert*, t LXX, p. 105 (Valyi); *Mathesis*, t. III, p. 226; J. M. S., 1887, p. 103 (Rogier).

M. Lemoine considère des *triangles circulairement homologiques* : ABC est homologique avec A'B'C', B'C'A', C'A'B'. (J. N.)

670. (Voir *Mathesis* (1) IX, p. 280). 1° Les cercles osculateurs d'une courbe plane ne peuvent rencontrer un même cercle sous un angle constant. 2° Il n'y a pas de courbes dont les sphères osculatrices rencontrent orthogonalement une sphère fixe. 3° Y en a-t-il dont les sphères osculatrices rencontrent une même sphère sous un angle constant? (E. Cesáro.)

(*) Cette question n'est pas entièrement nouvelle. Elle se rattache à la *projectivité cyclique*. Les conditions de la question sont réalisées, lorsqu'on fait tourner une figure n fois autour d'un point fixe, chaque fois de l'angle $(2\pi : n)$. (J. N.)

676. (Voir *Mathesis* (1) X, p. 48). L'équation

$$a\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$+b\left(1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\pm\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)+c=0$$

ne peut avoir plus de deux racines réelles. (SYLVESTER.)

***701.** Soient : ABCD un rectangle inscrit dans la circonférence O; E le milieu de AD; G le point de rencontre de la circonférence avec la droite CE; F un point quelconque de la diagonale et K sa projection sur AD; I le milieu du segment AK. 1° L'angle GIF = CAB. 2° Si par F on mène une parallèle à AD, rencontrant CE en N et BE en M, les cinq points E, N, D, G, I sont sur une même circonférence tangente à FI. 3° Si GF rencontre en P la circonférence ABCD en P, le quadrilatère BMFP est inscriptible, et les points A, M, P sont sur une parallèle à FI. 4° Les droites FI, AB se rencontrent sur la circonférence circonscrite au triangle AIG. (A. C.)

702. Trouver le lieu du foyer d'une parabole touchant une logarithmique (équation $y = e^x$) en un point variable M et l'axe des X au pied de l'ordonnée de M. (H. BROCARD.)

***703.** 1° Si le nombre $N = 100\,a + 10\,b + c$ est divisible par 131, il en est de même du nombre

$$N' = (c - a)^2 + (3a - b)(3c - b),$$

et réciproquement.

2° Si le nombre $N = 100\,a + 10\,b + c$ est divisible par 107, il en est de même de

$$N' = (7a - c)^2 + 7b^2,$$

et réciproquement. (R. PERRIN.)

Rectifications. T. X, p. 247, ligne 7 en remontant lire

$$\frac{A_2C}{A_3B} = -\frac{\beta_2\beta_1}{\gamma_2\gamma_1},$$

p. 249, ligne 4-9. On n'a considéré que les valeurs absolues des rapports; la dernière proportion est, en tenant compte des signes,

$$\frac{A_2C}{A_3B} = -\frac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2},$$

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

par M. J. Neuberg.

Dans une lettre datée du 1/13 novembre 1890, M. Sollertinsky, professeur à Gatschina (Russie) nous communique le théorème suivant :

Étant donnés quatre points A, B, C, D *dans un même plan, on fait passer une circonférence par les projections de l'un de ces points sur les côtés du triangle déterminé par les trois autres points. Les quatre circonférences ainsi obtenues passent par un même point* E, *centre de l'hyperbole équilatère* ABCD. — Corollaire. *Lorsqu'un point* D *parcourt un diamètre du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *ou une hyperbole équilatère circonscrite à ce triangle, la circonférence circonscrite au triangle podaire de* D *par rapport au triangle* ABC *passe par un point fixe.*

M. P. Terrier a donné, sans démonstration, le même théorème avec un grand nombre d'autres propriétés de la figure, dans un mémoire intitulé *Quadrilatères et sections coniques* (Voir N. A. M., 1876, p. 109); mais ce géomètre n'a pas remarqué que E est le centre de l'hyperbole équilatère ABCD.

En cherchant à démontrer les théorèmes de MM. Sollertinsky et Terrier, nous avons également rencontré quelques nouvelles propositions se rapportant au même sujet, et il nous a semblé utile et intéressant de réunir en une même note les principales propriétés, déjà signalées ou encore inédites, du quadrangle complet.

1. Un quadrangle complet est la figure déterminée par quatre points A, B, C, D et les six droites qui joignent ces points deux à deux. Ces points sont les *sommets*, et ces droites sont les *côtés* du quadrangle. On distingue trois couples de côtés opposés, à savoir AB et CD, AC et BD, AB et BC; les points d'intersection X, Y, Z de deux côtés opposés prennent le nom de *points diagonaux*, et sont les sommets du *triangle diagonal*.

La figure peut se décomposer de quatre manières en un triangle et en trois vecteurs; par exemple, une de ces décompositions est formée par le triangle ABC et les trois vecteurs DA, DB, DC.

Les points A, B, C, D, pris trois à trois, sont les sommets de quatre triangles dont les aires sont liées par l'identité

$$ABC - BCD + CDA - DAB = 0. \qquad (1)$$

Il est bien entendu que dans cette égalité, ABC par exemple représente la valeur absolue de l'aire du triangle qui a pour sommets les points A, B, C, cette valeur étant précédée du signe + ou du signe —, suivant qu'un mobile allant de A en B, puis de B en C circule dans le sens de rotation adopté comme positif ou dans le sens contraire.

Nous désignons les termes de l'identité (1) par $\delta, \alpha, \beta, \gamma$, en sorte que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Il est facile de voir que quatre forces parallèles proportionnelles à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et appliquées respectivement en A, B, C, D se font équilibre; ou encore que les coordonnées barycentriques de D dans le triangle ABC sont α, β, γ; que celles de A dans le triangle BCD sont β, γ, δ; etc.

2. Désignons par M_{ab}, M_{cd}, les milieux des droites AB, CD, ...; par G_a, G_b, ... les centres de gravité des triangles BCD, CDA, ... Nous rappelons les propriétés suivantes :

1° *Les droites* $M_{ab}M_{cd}$, $M_{bc}M_{da}$, $M_{ac}M_{bd}$ *se coupent en leur milieu commun* G, *centre des moyennes distances du quadrangle* ABCD.

2° *Les droites* AG_a, BG_b, CG_c, DG_d *passent par* G *et y sont divisées dans le rapport* 3 : 1.

3° *Les deux quadrangles* ABCD, $G_aG_bG_cG_d$ *sont homothétiques par rapport à* G.

Soient A', B', C', D' les symétriques des points A, B, C, D par rapport à G. Les points M_{ab}, M_{ac}, ... seront également les milieux des côtés C'D', B'D' ... du quadrangle A'B'C'D'. Il y a cependant à observer cette différence que les milieux des trois côtés d'un triangle dérivé du quadrangle ABCD sont les milieux de trois côtés du second quadrangle qui ont une extrémité commune.

On peut présenter ces résultats sous une forme plus intéressante, mais moins complète, qui nous a été communiquée par M. Sollertinsky : D *étant un point quelconque du plan d'un triangle* ABC, *les parallèles menées par les milieux des droites* DA, DB, DC *aux côtés correspondants* BC, CA, AB *du triangle* ABC *forment un nouveau triangle* A'B'C' *symétrique de* ABC *par rapport à un point* G *qui divise dans le rapport* 3 : 1 *la droite joignant* D *au centre de gravité du triangle* ABC. — *Pour que les deux triangles* ABC, A'B'C' *soient circonscrits à un même cercle, il faut prendre pour* D *le point qui divise la droite joignant le centre de*

gravité de ABC *au centre d'un cercle inscrit ou exinscrit, en deux segments soustractifs, proportionnels aux nombres* 4 *et* 3.

3. Les perpendiculaires élevées aux six côtés du quadrangle ABCD en leurs milieux concourent trois à trois en quatre points O_a, O_b, O_c, O_d, centres des cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC ; ce sont donc les côtés d'un quadrangle complet $O_aO_bO_cO_d$.

La considération des quadrangles ABCD, $O_aO_bO_cO_d$ conduit à une foule de résultats très curieux.

Nous en pouvons d'abord déduire le théorème des triangles orthologiques. En effet, soient ABC, $A_1B_1C_1$ deux triangles tels que les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 concourent en un même point D. Le triangle $A_1B_1C_1$ étant homothétique à $O_aO_bO_c$, les parallèles menées par A_1, B_1, C_1 aux droites O_aO_d, O_bO_d, O_cO_d, concourent en un même point D_1.

Si l'on fait ensuite tourner la figure $A_1B_1C_1D_1$ dans son plan ou qu'on en prenne la symétrique par rapport à une droite du plan, on obtient ce théorème plus général : *Étant donné un quadrangle complet* ABCD, *on en peut toujours construire un second* $A_1B_1C_1D_1$, *tel, que les côtés du premier fassent un même angle avec les côtés opposés du second* (par exemple AB avec C_1D_1), *ou que les côtés opposés soient antiparallèles par rapport à une direction fixe.* (*A continuer.*)

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Limite de la somme d'un nombre fini de variables.

1. Théorème. *La limite de la somme algébrique d'un nombre fini de variables commensurables, dont chacune a une limite commensurable, est égale à la somme algébrique de ces limites.*

Soient, par exemple, u, v, ..., w, des variables commensurables, positives ou négatives, en nombre n fini, ayant respectivement pour limites les constantes commensurables a, b, ..., c. Cela signifie que les différences

$$\alpha = u - a, \quad \beta = v - b, \quad \ldots, \quad \gamma = w - c$$

peuvent devenir et rester aussi petites que l'on veut, en valeur absolue. Posons

$$\delta = (u + v + \cdots + w) - (a + b + \cdots + c)$$

On aura

$$\delta = (u - a) + (v - b) + \cdots + (w - c) = \alpha + \beta + \cdots + \gamma,$$

et δ composé de n parties, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, dont chacune, en valeur absolue, devient et reste aussi petite que l'on veut, jouit de la même propriété. On a donc, d'après la définition de la limite,

$$\lim (u + v + \cdots + w) = a + b + \cdots + c, \qquad (1)$$

ou encore, puisque $a = \lim u$, $b = \lim v$, $\ldots$, $c = \lim w$,

$$\lim (u + v + \cdots + w) = \lim u + \lim v + \cdots + \lim w. \qquad (2)$$

2. Remarques. I. La démonstration précédente subsiste, si l'une ou plusieurs des quantités $u, v, \ldots, w$ sont constantes. Si. par exemple, u est constant et égal à a, il suffit de faire $\alpha = 0$, dans les raisonnements précédents. La limite d'une constante, étant, par convention, cette constante même, on peut écrire, $\lim u$ au lieu de a ou u, dans la relation (1). Par suite, quand u est constant, on peut encore donner à la relation (1), la forme (2).

II. Il peut arriver que la somme $u + v + \cdots + w$, bien que composée de quantités variables, soit égale à une quantité constante d. Alors, on a

$$\delta = (u + v + \cdots + w) - (a + b + \cdots + c) = d - (a + b + \cdots + c)$$

et δ est aussi une constante. Cette constante ne peut être que zéro; car si δ était une quantité différente de zéro, comme elle est égale à $\alpha + \beta + \cdots + \gamma$, on aurait une constante non nulle, somme de n quantités $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, dont chacune en valeur absolue est aussi petite qu'on le veut, ce qui est absurde. On a donc $\delta = 0$ ou

$$d = a + b + \cdots + c. \qquad (3)$$

Au lieu de $d = u + v + \cdots + w$, on peut écrire $\lim d$ ou encore $\lim (u + v + \cdots + w)$; puis, comme plus haut, remplacer $a, b, \ldots, c$ par $\lim u$, $\lim v$, $\ldots$, $\lim w$. Donc l'égalité (3) prend encore la forme

$$\lim (u + v + \cdots + w) = \lim u + \lim v + \cdots + \lim w. \qquad (2)$$

III. La démonstration du théorème du n° 1 suppose que les limites $a, b, \ldots, c$ sont finies, puisque dans le cas contraire, les égalités $\alpha = u - a$, $\beta = v - b$, $\ldots$, $\gamma = w - c$ n'auraient aucun sens.

Si une ou plusieurs des quantités $u, v, \ldots, w$, *supposées de même signe*,

croissent indéfiniment en valeur absolue, il est clair qu'il en est de même de $u+v+\cdots+w$. Dans ce sens, on peut dire que l'égalité (2) est encore vraie.

Mais si deux ou plusieurs des n quantités $u, v, \ldots, w$, supposées les unes positives, les autres négatives, croissent en valeur absolue, le second membre de la relation (2) prend la forme indéterminée $\infty-\infty$. Bien loin que, dans ce cas, ce second membre de (2) fasse connaître la valeur du premier, c'est le plus souvent le premier qui, par convention, est regardé comme donnant la valeur du second.

3. *Emploi abusif du théorème sur la limite d'une somme de plusieurs variables.* La somme δ de n quantités indéfiniment décroissantes $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ peut ne pas avoir zéro pour limite, si le nombre n croît indéfiniment en même temps que $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ tendent vers zéro. Le théorème sur la limite d'une somme de variables n'est donc pas établi dans le cas où le nombre de ces variables croît indéfiniment.

On l'a pourtant souvent appliqué à ce cas. Pour montrer ce qu'il y a d'abusif dans cet emploi du théorème du n° 1, nous allons montrer sur quelques exemples à quelles absurdités on peut être conduit en opérant ainsi.

I. On a

$$1+\frac{1}{m}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}, \qquad (4)$$

$\frac{1}{m}$ étant répété $(m+1)$ fois dans le second membre. Pour m croissant indéfiniment $\lim\frac{1}{m}=0$. Si l'on applique le théorème sur la limite d'une somme à la relation précédente, on trouve l'égalité absurde :

$$1+0=0+0+\cdots \text{ (indéfiniment).}$$

II. L'expression suivante,

$$L_{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

où n est supposé entier positif, croît avec n. En effet, si l'on change n en $n+1$, elle devient

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2},$$

quantité qui surpasse la précédente de

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

D'ailleurs L_{2n} est inférieure à n fois $\frac{1}{n}$ ou à l'unité, et supérieure à n fois $\frac{1}{2n}$ ou à $\frac{1}{2}$. Donc d'après les principes généraux de la méthode des limites, L_{2n} a une limite L supérieure à $\frac{1}{2}$ et au plus égale à l'unité.

Pour n croissant indéfiniment,

$$\lim\frac{1}{n+1}=0,\ \lim\frac{1}{n+2}=0,\ \ldots,\ \lim\frac{1}{2n}=0.$$

Si l'on applique indûment à L_{2n}, le théorème sur la limite d'une somme, on trouve

$$L=0+0+\cdots \text{ (indéfiniment)}$$

ce qui est inexact.

III. Autrefois (*) de l'égalité

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{1}{m^p}+\cdots+\frac{1}{m^m},$$

ou encore

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{1.2\ldots p}$$
$$+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\ldots m}, \qquad (5)$$

on déduisait, par passage à la limite, quand m croît indéfiniment, en appliquant le principe du n° 1,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\cdots \text{ (indéfiniment)}. \qquad (6)$$

(*) Lefébure de Fourcy, *Leçons d'Algèbre*, 5e édition, p. 472, n° 573. Au n° 576, l'auteur indique lui-même l'erreur du raisonnement du n° 573.

Le second membre signifiait

$$\lim\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots p}\right)$$

pour p croissant indéfiniment.

On prouvera plus tard que le résultat contenu dans la relation (6) est exact, mais il est obtenu par un procédé qui, dans d'autres cas, peut conduire à des erreurs. Pour le montrer, ajoutons les relations (4) et (5) terme à terme. Il viendra

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+\left(1+\frac{1}{m}\right)=\left(1+\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{m}\right)+\cdots$$
$$+\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{1.2\ldots p}+\frac{1}{m}\right\}+\cdots$$
$$+\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\ldots m}+\frac{1}{m}\right\}. \qquad (7)$$

Passons à la limite, pour m croissant indéfiniment, dans cette relation (7), comme on a fait dans la relation (5); il viendra

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+1=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2..p}+\cdots \text{ (indéfiniment)} \quad (8)$$

relation incompatible avec la relation (6). En effet, les seconds membres de (6) et (8) sont identiques et les premiers ont une différence égale à l'unité. (*A continuer.*) (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg, Dr. Ph. Vol. I. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri. MDCCCXCI (XII-451 p.).

Apollonius est le seul grand géomètre de l'antiquité dont nous ne possédions que très incomplètement les œuvres dans le texte original. Des huit livres de son ouvrage capital, les *Coniques*, nous n'avons que les quatre premiers en grec; mais les trois suivants sont heureusement conservés dans des traductions arabes et l'on a pu conjecturer le sujet du huitième par les lemmes de Pappus qui s'y rapportent.

Pendant longtemps, les traductions latines des quatre premiers livres des *Coniques* faites au 16e siècle ont été seules entre les mains des géomètres; elles ont eu une grande influence sur le développement de la science du temps de Descartes et

de Fermat. Le texte grec n'a été publié qu'en 1710, dans la grande édition de Halley, qui contient aussi la traduction latine de ces livres et des trois suivants (d'après l'arabe), et une restitution du huitième, ainsi que le livre de Serenus sur les sections du cône et du cylindre.

M. Heiberg, à qui la science doit déjà la publication des œuvres d'Euclide et d'Archimède, vient d'entreprendre une nouvelle édition de tout ce qui nous reste d'Apollonius en grec. Le tome I contient les trois premiers livres des coniques, avec traduction latine. Pour établir le texte, M. Heiberg s'est surtout servi d'un manuscrit du Vatican.

Nous ne doutons pas que l'Apollonius de l'éminent philologue danois n'ait le même succès que son Euclide et son Archimède et nous le signalons à l'attention de tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques.

Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique à l'usage des candidats à l'école de Saint Cyr et des élèves de mathématiques élémentaires, qui se destinent aux mathématiques spéciales, par MACÉ DE LÉPINAY, ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Henri IV. Premier fascicule : *Compléments d'Algèbre.* Paris, Nony et Cie 1891. Un volume in-8° de 171 p. in-8°. (Prix des deux fascicules : 4 francs.)

On sait que, sous le nom de *Compléments d'Algèbre*, on enseigne en France, dans les classes de mathématiqnes spéciales, les premiers éléments du calcul différentiel, ou de la théorie générale des fonctions. Le petit livre de M. Macé de Lépinay est donc un manuel élémentaire d'analyse infinitésimale.

Voici, avec quelques notes, l'indication des matières qui y sont traitées.

CHAPITRE I. *De la continuité.* 1. Fonctions explicites, implicites, algébriques, transcendantes. La définition des fonctions transcendantes est insuffisante.

2. Des limites. Principes généraux (admis sans démonstration). Principes spéciaux (somme, produit, quotient, puissances) démontrés seulement dans le cas où les quantités considérées sont commensurables.

3. Continuité. Les fonctions algébriques explicites sont continues. Théorème de Cauchy : Une fonction continue ne peut changer de signe sans passer par zéro.

4. Dix-huit exercices.

CHAPITRE II. *Des dérivées.* 1. Définition. Interprétation géométrique (ce sujet est traité avec grand soin).

2. Dérivées des fonctions algébriques explicites et des fonctions trigonométriques directes. Pour plusieurs de ces dernières fonctions la question est traitée à la fois par l'analyse et la géométrie.

3. Dérivée des fonctions de fonction.

4. Dérivée des fonctions implicites algébriques. L'auteur a soin de faire observer qu'il *admet* la continuité de ces fonctions, en quoi il a grandement raison Beaucoup d'auteurs ne signalent pas ce postulat implicite que l'on ne peut éviter dans un cours élémentaire.

4. Vingt-et-un exercices.

CHAPITRE III. *Variations des fonctions.* 1. Théorèmes relatifs à la variation des fonctions. La démonstration des deux théorèmes fondamentaux : 1° *Si* $f'x = 0$, *fx est constant* (n° 90); 2° *Si* $f'x$ *change de signe en passant par zéro, fx passe par un maximum ou un minimum* (n° 101-102) est, selon nous, complètement manquée. Dans la première démonstration, il faudrait prouver que ε a pour limite zéro, c'est-à-dire établir que la fonction est uniformément continue (Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 156). Dans la seconde, on prouve simplement que la fonction croît (ou décroît) jusqu'aussi près qu'on le veut de la valeur correspondant à $f'x = 0$, et que c'est l'inverse au-delà, mais on n'apprend rien sur la valeur de fx correspondant à $f'x = 0$. — L'un et l'autre théorème peuvent s'établir d'une manière simple et avec rigueur, en partant du théorème de Rolle ou de l'égalité équivalente : $f(x+h) - fx = hf'(x+\theta h)$.

2 Applications : Étude minutieuse et très bien faite, avec représentations graphiques de $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^4 + bx^2 + c$, $y = (ax+b) : (a'x + b')$, $y = (ax^2 + bx + c) : (a'x^2 + b'x + c')$.

3 Quelques exemples contenant des radicaux du second degré; $y = x(a-x)$, $y = ax^m(a-x)^p$, $y = x + a^2x^{-1}$, $y = x(x-1)^3(x-2)$; volume et surface d'un cylindre inscrit dans une sphère; autres questions analytiques et géométriques.

4. Cinquante exercices.

A part les défauts que nous avons dû signaler plus haut au point de vue de la rigueur, nous trouvons que le petit livre de M. Macé de Lépinay est très pratique et très utile et nous le recommandons vivement aux professeurs et aux élèves des classes supérieurs des lycées, des athénées et des collèges. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 414.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 46.)

On donne deux circonférences O ***et*** O_1, ***qui se coupent en*** A ***et*** B. ***Démontrer qu'il n'existe qu'une seule conique osculatrice en*** A ***au cercle*** O, ***et osculatrice aussi au cercle*** O_1. ***Déterminer le point d'osculation du cercle*** O_1.

(DEWULF.)

Solution analytique par M. ANDERSON (Galway). Prenons pour axes les droites qui touchent les deux cercles en A. Si θ est l'angle de ces axes, on trouve facilement pour les équations des deux cercles :

$$S \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2ry\sin\theta = 0, \qquad (1)$$

$$S_1 \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2r_1x\sin\theta = 0. \qquad (2)$$

Une conique qui oscule la première circonférence en A, a pour sécantes

communes avec cette ligne l'axe des abscisses et une droite menée par A; son équation est donc de la forme $S + y(ax + by) = 0$, ou

$$S_2 \equiv x^2 + cxy + dy^2 - 2ry \sin\theta = 0.$$

Si entre les équations $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ on élimine les termes du premier dégré, on obtient une équation homogène

$$ry(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) - r_1 x(x^2 + cxy + dy^2) = 0, \qquad (3)$$

qui représente les trois droites joignant A aux points d'intersection des lignes S_1 et S_2. Pour qu'il y ait un contact du deuxième ordre entre S_1 et S_2, ces trois droites doivent coïncider, et le premier membre de l'équation (3) doit être un cube parfait. Cette égalité peut prendre la forme

$$y^3 - \left(\frac{r_1}{r} - 2d\cos\theta\right)xy^2 + \left(1 - \frac{cr_1}{r}\right)x^2y - \frac{r_1}{r}x^3 = 0;$$

en identifiant le premier membre avec $(y - \mu x)^3$, on trouve

$$\mu = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad 2d\cos\theta = \frac{r_1}{r} - 3\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{cr_1}{r} = 1 - 3\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

La valeur de μ fixe le point d'osculation de S_1 et S_2; les valeurs de c et d déterminent S_2.

La racine cubique ayant trois valeurs, il est plus exact de dire qu'il existe trois coniques osculatrices, dont une seule est réelle. Pour d'autres solutions, géométriques, voir *Mathesis*, t. VIII, p. 34 (SERVAIS) et t. X, p. 57 (DEWULF); CASEY, *Analyt. Geometry*, 1885, p. 240. (J. N.)

Question 667.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 264.)

Si en un point quelconque A ***d'une conique, on mène un cercle tangent dont le rayon soit double du rayon de courbure en ce point :*** 1° ***le pôle*** P, ***par rapport au cercle, de la corde d'intersection*** BC ***de la conique et du cercle est sur la conique***; 2° ***les deux droites*** BC, PA ***sont conjuguées harmoniques par rapport à la conique.*** (SERVAIS.)

Solution analytique par MM. DÉPREZ ***et*** DENYS. Prenons pour axes de coordonnées la tangente AT' et la normale AO. La conique et le cercle osculateur en A peuvent être représentés par les équations

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy = 0,$$
$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + y(Ex + Fy) = 0;$$

car les cordes communes sont AX et une droite menée par A. On a les conditions

$$A + F = C, \quad 2B + E = 0,$$

d'où l'on déduit que l'ordonnée du centre de courbure a pour valeur $-\frac{2D}{B}$. L'équation d'un cercle Δ touchant AT en A et ayant un rayon double du rayon de courbure de la conique est, par conséquent,

$$C(x^2 + y^2) + 4Dy = 0. \tag{1}$$

Si on la retranche de celle de la conique, on trouve pour l'équation de la corde commune BC

$$(A - C)y + 2Bx - 2D = 0. \tag{2}$$

Soient (α, β) les coordonnées du pôle P de cette corde par rapport au cercle Δ; identifiant l'équation (2) avec la suivante

$$C(\alpha x + \beta y) + 2D(y + \beta) = 0,$$

on trouve

$$\alpha = \frac{4BD}{AC}, \quad \beta = -\frac{2D}{A}.$$

Ces coordonnées vérifient l'équation de la conique.

La droite AP est représentée par

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ou} \quad 2By + Cx = 0. \tag{3}$$

Si (X, Y) sont les coordonnées du pôle de AP par rapport à la conique, l'équation (3) doit être identique avec la suivante

$$(AY + BX + D)y + (BY + CX)x + DY = 0;$$

on en conclut

$$Y = 0, \quad \frac{BX + D}{CX} = \frac{2B}{C}, \quad X = \frac{D}{B}.$$

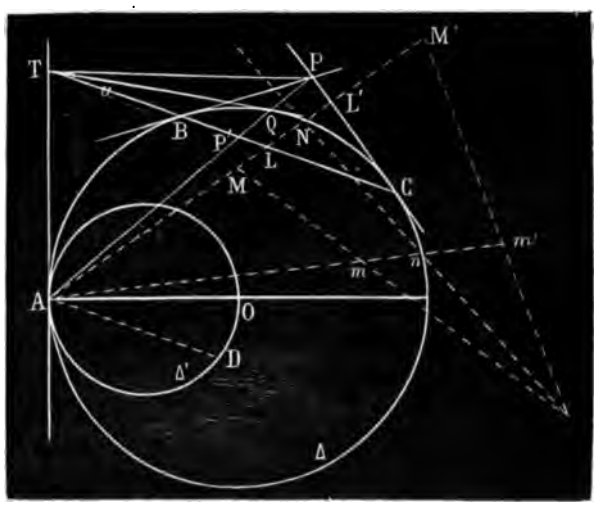
Comme ces valeurs de X, Y vérifient l'équation (2), le pôle de AP est situé sur BC.

Solution géométrique par M. Lalisse. La question 667 peut se déduire des propriétés de la quasi-inversion linéaire (voir *Mathesis*, t. VII, pp. 110, 129, 187, t. IX, p. 267).

Soient Δ une circonférence donnée, O son centre, A un point fixe de Δ, M et M′ deux points situés en ligne droite avec A et conjugués har-

moniques par rapport à Δ : M et M′ se correspondent dans une quasi-inversion linéaire. Aux points à l'infini correspondent les milieux des cordes de Δ menées par A; donc la droite de l'infini a pour transformée la circonférence Δ′ décrite sur OA comme diamètre.

Cherchons la transformée d'une droite u rencontrant Δ aux points B, C. Si une droite menée par A coupe u en L et Δ en N, la droite conjuguée harmonique avec BN par rapport à l'angle ABN rencontre AL en un point L′, qui est le transformé de L. Lorsque N parcourt Δ, les



droites BN, BL′ engendrent deux faisceaux projectifs, car le rapport anharmonique du faisceau B (ALNL′) reste constant et deux de ses rayons sont fixes. Les droites BN et AN engendrent également deux faisceaux projectifs; par conséquent, les droites BL′ et AL′ se correspondent dans deux faisceaux projectifs et leur intersection L′ décrit une conique S passant par A, B, C.

Le point à l'infini sur u a pour homologue l'intersection D de Δ′ avec une parallèle à u menée par A; comme D est le seul point commun à S et Δ′, autre que A, Δ′ est le cercle osculant S en A.

Soit P le pôle de BC par rapport à Δ. Ce point a, évidemment, pour homologue dans la quasi-inversion linéaire, le point P′ où la droite AP coupe BC; il appartient donc à S.

Appelons Q le point de rencontre de AP avec Δ. En général, si M et

M', m et m' sont deux couples de points correspondants dans la quasi-inversion, situés sur les cordes AM, An de Δ, les droites Mm, M'm', Nn concourent en un même point, car

$$(ANMM') = (Anmm') = -1.$$

En supposant les points M et m infiniment voisins, on voit que les tangentes en deux points homologues M, M' de deux courbes transformées l'une de l'autre par quasi-inversion, se coupent sur la tangente menée au point N où la droite MM' rencontre Δ. Par conséquent, la tangente en P à la conique S, la tangente en Q au cercle Δ et la droite BC concourent en un même point T, qui est évidemment, le pôle de AP par rapport à Δ La tangente en A à Δ passe donc par T, et comme elle touche également S en A, T est aussi le pôle de AP par rapport à S, et les droites AP, BC, dont l'une passe par le pôle de l'autre sont conjuguées relativement à S.

Remarque. Soit E le point de rencontre de BC avec AD, et F le conjugué harmonique de E par rapport à Δ; F est l'extrémité de la corde normale en A à S. *La circonférence décrite sur* AP *comme diamètre passe par les extrémités* D, F *de la corde de courbure et de la corde normale au point* A; en effet, OP est perpendiculaire à BC et par suite, est AD et passe par D, de sorte que les angles ADP, AFP sont droits.

(Servais.)

×Question 695.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 240.)

Soient O *le centre*, F *et* F' *les foyers d'une ellipse. On prolonge un rayon quelconque* OM *de* MM' = OM, *et l'on mène les tangentes* M'P, M'Q; P *et* Q *étant les points de contact, démontrer la relation*

$$4M'P \cdot M'Q = 3M'F \cdot M'F'. \qquad (1)$$

(A. Gob.)

Cette propriété est un cas particulier d'un théorème que M. Laisant a établi par les équipollences (*Congrès d'Oran*, 1888, p. 113-118) et dont une démonstration analytique se trouve aussi, d'après une indication de M. Beyens, dans le *Companion to the Weekly Problem Papers* du Rév. John Milne, pp. 264 et 267. Ce théorème correspond à la formule

$$\frac{M'P \cdot M'Q}{M'F \cdot M'F'} = 1 - \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2} = \frac{M'N}{M'O} = \frac{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2y^2 + b^2x^2}; \qquad (2)$$

M′ est un point quelconque du diamètre OM, N le milieu de la corde PQ, et x, y désignant les coordonnées de M′.

Voici la démonstration de l'auteur anglais. Si θ est l'angle de M′P avec le grand axe, et t la longueur M′P, les coordonnées de P sont

$$X = x + t\cos\theta, \quad Y = y + t\sin\theta.$$

En les portant dans l'équation de l'ellipse

$$u^4 \equiv a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

on obtient

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,t^2 + 2\,(a^2y\sin\theta + b^2x\cos\theta)\,t + u^4 = 0.$$

Pour que M′P touche la courbe, les deux valeurs de t doivent être égales; par conséquent,

$$(a^2y\sin\theta + b^2x\cos\theta)^2 - (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,u^4 = 0,$$

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,t^2 - u^4 = 0,$$

ou

$$a^2\,(a^2y^2 - u^4)\sin^2\theta + b^2\,(b^2x^2 - u^4)\cos^2\theta + 2a^2b^2xy\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$(a^2t^2 - u^4)\sin^2\theta + (b^2t^2 - u^4)\cos^2\theta = 0.$$

La seconde relation donne

$$\sin^2\theta = \frac{u^4 - b^2t^2}{c^2t^2}, \quad \cos^2\theta = \frac{a^2t^2 - u^4}{c^2t^2};$$

substituant ces valeurs dans la première, on trouve

$$\left\{t^2\,(a^2y^2 - b^2x^2) + u^4\,(x^2 - y^2 - c^2)\right\}^2 = 4x^2y^2\,(u^4 - b^2t^2)\,(a^2t^2 - u^4).$$

Cette équation admet les racines M′P $= t$, M′Q $= t_1$; par suite,

$$t^2t_1^2 = \frac{u^8\left\{x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2y^2\right\}}{(a^2y^2 - b^2x^2)^2 + 4a^2b^2x^2y^2} = \frac{u^8\left\{(x^2 + y^2 - c^2)^2 - 4c^2x^2\right\}}{(a^2y^2 + b^2x^2)^2},$$

D'où

$$\frac{tt_1}{\mathrm{M'F}\,.\,\mathrm{M'F'}} = \frac{u^4}{a^2y^2 + b^2x^2} = 1 - \frac{a^2b^2}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

Si l'on pose OM $=$ K . OM′, les coordonnées de M sont Kx, Ky; en les portant dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$K^2\,(a^2y^2 + b^2x^2) = a^2b^2,$$

d'où l'on conclut la relation (2).

La démonstration suivante est imitée de celle que nous a adressée Mᵉ Carolina de Haas, de Rotterdam ; la figure suppose P sur le premier

quadrant d'ellipse et Q sur le deuxième. Prolongeons F'P de PR = PF; les triangles FM'P, RM'P sont égaux, et l'angle F'MR = QM'P. Il résulte de là que

$$\frac{M'P \cdot M'Q}{M'F \cdot M'F'} = \frac{\text{aire } QM'P}{\text{aire } F'M'R} = \frac{QM'P}{F'M'P + FM'P} = \frac{QM'P}{2OM'P}.$$

OM' coupe la corde PQ en son milieu N et la courbe en un second point m, on peut donc écrire

$$\frac{M'P \cdot M'Q}{M'F \cdot M'F'} = \frac{NM'P}{OM'P} = \frac{M'N}{M'O} = 1 - \frac{ON}{OM'} = 1 - \frac{ON \cdot OM'}{\overline{OM'}^2} = 1 - \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2}.$$

La dernière transformation résulte de la division harmonique $MmM'N$.

MM. Sohir et Decamp ont démontré l'égalité (1) par la géométrie analytique. M. Cristesco l'établit par des calculs assez simples, en introduisant l'angle φ auxiliaire tel que les coordonnées du point soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$. (J. N.)

×Question 696.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 240.)

Construire un triangle rectangle ABC *dont on connaît la hauteur* $AD = h$ *relative à l'hypoténuse* $BC = d$, *ainsi que la distance* $AB' = d$ *du sommet de l'angle droit au pied de la bissectrice* BB'. (A. Thiry.)

Solution par M^lle^ Pompilianu (Bucharest). Construisons l'angle droit CAB; sur le côté AC, prenons $AB' = d$ et des points A, B' comme centres, respectivement avec les rayons h, d, décrivons deux circonférences. La tangente commune extérieure est l'hypoténuse du triangle demandé. Le problème admet une solution répondant à l'énoncé, si $d < h < 2d$; quand $d > h$, la construction de la tangente commune est encore possible, mais BB' devient la bissectrice extérieure.

Solution par M. François (La Haye), Vladimirescu (Bucharest). Menons par B' une parallèle à CB, rencontrant AD en E. On peut construire le triangle rectangle DAB' dans lequel on connaît $AE = h - d$, $AB' = d$ (B' est équidistant de A et BC). Il reste à prendre sur AE la longueur $ED = d$, à mener par D une parallèle à B'E et en A une perpendiculaire à AC.

Solution par M^e^ Carolina de Haas *et* MM. Vladimirescu, Beyens

(major du génie, à Cadix), Sohie, Decamp. La propriété de la bissectrice donne

$$\frac{d}{b-d}=\frac{c}{a},$$

mais $bc = ah$, ou $c : a = h : b$; par suite

$$\frac{d}{b-d}=\frac{h}{b}=\frac{h-d}{d}, \quad b=\frac{hd}{h-d}.$$

Solution par MM. Demolder *et* Marchand (athénée de Louvain), *et* Brandza (Bucharest). Prenons sur BC une longueur BK = BA; le triangle ABK étant isocèle, BB′ est perpendiculaire au milieu L de AK, et la distance LL′ de L à AB $= \frac{1}{2}h$. D'où la solution : Prendre une longueur AB′ $= d$; construire sur AB′ comme diamètre une demi-circonférence, rencontrant en L une perpendiculaire menée sur AB′ à une distance de A égale à $\frac{1}{2}h$; sur AK = 2AL, construire le triangle AKD rectangle en D et ayant le côté AD $= h$.

Solution par M. Brandza. Ayant pris sur BC la longueur BK = BA, j'observe que BB′ est perpendiculaire au milieu L de AK et coupe AD en un point I tel, que la figure AB′KI est un losange. Je puis donc construire le triangle rectangle DIK dans lequel DI $= h - d$, IK $= d$, puis achever le losange AIKB′ etc.

Solution analogue par M. Cristesco.

Solution par M. F. Verhelst (Anvers). La hauteur AD rencontre la bissectrice intérieure BB′ et la bissectrice extérieure BB″ de l'angle ABC en deux points I, I′, conjugués harmoniques par rapport à A, D. Les angles AB′B, AIB′ étant égaux, on a AI = AB′ $= d$. Donc on peut construire le système harmonique ADII′, et la circonférence décrite sur II′ comme diamètre détermine sur la perpendiculaire élevée en D sur AD le point B; etc.

Un calcul facile donne

$$\mathrm{ID} = h - d, \quad \mathrm{I'D} = \frac{h(h-d)}{2d-h}, \quad \mathrm{BD} = \sqrt{\mathrm{ID}.\,\mathrm{I'D}} = (h-d)\sqrt{\frac{h}{2d-h}}$$

$$\mathrm{AB} = d\sqrt{\frac{h}{2d-h}},$$

×Question 700.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 279.)

Si x, y, z sont des nombres entiers, le nombre

$$N = xyz(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz) + x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$$

est décomposable en deux facteurs entiers, et, par suite, ne peut être premier. (CATALAN.)

Solution par M. A. L. On a l'identité

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) = 3 + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}.$$

Multiplions par $x^2y^2z^2$; il vient

$$(x^2z + y^2x + z^2y)(x^2y + y^2z + z^2x) = N.$$

Solution par M. KLUYVER (Breda). En égalant à zéro, l'expression proposée, on obtient

$$x^4yz + x^3(y^3 + z^3) + 3x^2y^2z^2 + xyz(y^3 + z^3) + y^3z^3 = 0,$$

équation qui, au moyen de la substitution

$$x + \frac{yz}{x} = t, \quad x^2 + \frac{y^2z^2}{x^2} = t^2 - 2yz,$$

se ramène successivement à

$$t^2yz + t(y^3 + z^3) + y^2z^2 = 0, \quad (tz + y^2)(ty + z^2) = 0,$$
$$(x^2z + y^2x + z^2x)(x^2y + y^2z + y^2z) = 0.$$

On voit facilement que N est égal au premier membre de la dernière égalité.

Solution par MM. LALISSE, FRANÇOIS, MANDART, DE STREKALOF, DE BOZÓKY, RUSSO. On peut écrire

$$N = \begin{cases} x^4yz + x^3y^3 + x^2y^2z^2 \\ + xy^4z + y^3z^3 + x^2y^2z^2 \\ + xyz^4 + z^3x^3 + x^2y^2z^2 \end{cases} = \begin{cases} x^2y(x^2z + xy^2 + yz^2) \\ + y^2z(xy^2 + yz^2 + zx^2) \\ + z^2x(yz^2 + x^2z + xy^2) \end{cases}$$
$$= (x^2y + y^2z + z^2z)(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Généralisation par M. E. CESÁRO. La question est susceptible de plusieurs généralisations. En voici une. On a

$$xyzuvw\,[uvw(x^3 + y^3 + z^3) + xyz(u^3 + v^3 + w^3)]$$
$$+ (yzvw)^3 + (zxwu)^3 + (xyuv)^3$$
$$= (ywz^2v^2 + zux^2w^2 + xvy^2u^2)(zvy^2w^2 + xwz^2u^2 + yux^2v^2).$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

469. Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin^3 x + \sin^5 x + \sin^7 x = \cos x + \cos^3 x + \cos^5 x + \cos^7 x.$$

En combinant les termes de même rang des deux membres, on trouve la solution $\cos x = \sin x$, et l'équation

$$2(\cos x + \sin x) = -2 - \cos x \sin x,$$

qu'on résout aisément en élevant les deux membres au carré.

470. Valeur de

$$u = \frac{x^2}{1 - \cos mx} \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

On écrit

$$u = \frac{x^2}{2\sin^2 \frac{1}{2} mx} = \left(\frac{\frac{1}{2} mx}{\sin \frac{1}{2} mx}\right)^2 \cdot \frac{2}{m^2}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***704.** Dans tout triangle ABC, on a

$$(a \operatorname{tang} B - 2r)(b \operatorname{tang} C - 2r)(c \operatorname{tang} A - 2r)$$
$$= (a \operatorname{tang} C - 2r)(b \operatorname{tang} A - 2r)(c \operatorname{tang} B - 2r),$$

r étant le rayon du cercle inscrit. (H. MANDART.)

705. On considère tous les triangles sphériques ABC, inscrits à un même petit cercle, ayant un sommet fixe A et dans lesquels la somme $\cos AB + \cos AC$ a une valeur constante. Démontrer : 1° que le point de rencontre des médianes décrit un grand cercle; 2° que la base BC enveloppe une ellipse sphérique. (DÉPREZ.)

706. On donne un tétraèdre ABCD et une droite m. Des plans parallèles menés par A, B, C, D rencontrent m aux points A′, B′, C′, D′, par lesquels on mène des plans respectivement parallèles aux faces BCD, CDA, DAB. ABC. Démontrer que le tétraèdre A″B″C″D″ formé par ces nouveaux plans est symétriquement égal au tétraèdre ABCD.

(J. NEUBERG.)

Rectification. Page 12, ligne 12, dans le dénominateur de la dernière fraction, lire $n + 1$, au lieu de n.

ÉTUDE INTRINSÈQUE DES CONIQUES ET DES CASSINOÏDES ;

par M. E. Cesàro, à Palerme.

Ayant pris comme pôle un point d'une ellipse, et la tangente en ce point comme axe polaire, soient u, ω les coordonnées polaires d'un foyer. Pour exprimer que ce point est fixe, lors du déplacement du pôle sur la courbe, on doit écrire

$$\frac{du}{ds} = -\cos\omega, \quad \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin\omega}{u}, \tag{1}$$

ρ désignant le rayon de courbure au point de l'ellipse et s l'arc d'ellipse compté jusqu'à ce point. C'est ce qu'on déduit fort simplement de la considération du triangle ayant pour côtés u, $u + du$, ds. On a, en effet, en désignant par ε l'angle de contingence, égal à $\frac{ds}{\rho}$,

$$\frac{u}{\sin(\omega + \varepsilon + d\omega)} = \frac{u + du}{\sin\omega} = \frac{ds}{\sin(\varepsilon + d\omega)},$$

ou bien

$$\frac{u}{\sin\omega} = -\frac{du}{(\varepsilon + d\omega)\cos\omega} = \frac{ds}{\varepsilon + d\omega},$$

d'où l'on tire les formules (1). Soit v la distance du pôle mobile à l'autre foyer, et *définissons* la courbe par la propriété

$$u + v = 2a.$$

La différentiation de cette égalité montre que l'autre coordonnée polaire du second foyer est $\pi - \omega$, et l'on découvre ainsi que la normale est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs. On a donc

$$\frac{dv}{ds} = \cos\omega, \quad \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin\omega}{v}. \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) donnent, par soustraction,

$$\frac{2}{\rho} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\sin\omega,$$

d'où

$$uv = a\rho\sin\omega. \tag{3}$$

Cette propriété fournit immédiatement la construction, très connue, du

rayon de courbure. Les égalités (1) et (2) donnent encore, par addition,

$$2\frac{d\omega}{ds}=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)\sin\omega,$$

ou bien, en vertu de (3),

$$\frac{d\omega}{ds}=\frac{v-u}{2a\rho}. \tag{4}$$

Différentiant (3) il vient

$$3\rho d\omega+\operatorname{tg}\omega d\rho=0,$$

d'où

$$\rho=\frac{c}{\sin^3\omega}. \tag{5}$$

La relation (4) peut d'ailleurs être mise sous la forme

$$u-v=\frac{2}{3}a\frac{d\rho}{ds}\operatorname{tg}\omega. \tag{6}$$

On en déduit

$$u=a\left(1+\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\operatorname{tg}\omega\right),\quad v=a\left(1-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\operatorname{tg}\omega\right). \tag{7}$$

On obtient ensuite par multiplication, et par substitution dans (3),

$$1-\frac{1}{9}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2\operatorname{tg}^2\omega=\frac{\rho}{a}\sin\omega,$$

d'où

$$s=\frac{1}{3}\int\frac{\operatorname{tg}\omega d\rho}{\sqrt{1-\frac{\rho}{a}\sin\omega}}. \tag{8}$$

Enfin, si l'on pose

$$c'=\sqrt{\frac{a^3}{c}},$$

et qu'on tienne compte de (5), on trouve

$$s=\frac{1}{3}\int\frac{d\rho}{\sqrt{-\left[1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\left[1-\left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}}.$$

C'est l'équation intrinsèque cherchée. Elle montre que c et c' sont les valeurs extrêmes de ρ. La quantité soumise au radical, dans (8), ne pouvant être positive à moins que $c<a$, on doit avoir $c'>a$. Donc c

est le *minimum*, c' le *maximum* de ρ. Cela étant, les coordonnées cartésiennes du centre de l'ellipse sont

$$\alpha = \frac{u-v}{2}\cos\omega, \quad \beta = \frac{u+v}{2}\sin\omega,$$

c'est-à-dire, d'après (7),

$$\alpha = \frac{a}{3}\frac{d\rho}{ds}\sin\omega, \quad \beta = a\sin\omega.$$

On voit que

$$\frac{d\rho}{ds} = 3\frac{\alpha}{\beta},$$

ce qui démontre la construction donnée par Mac-Laurin pour le centre de courbure de la développée. D'après (5), ρ atteint son minimum pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorque le point est sur la droite focale. Alors la distance du point au centre, toujours donnée par la formule

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \left[1+\frac{1}{9}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} a\sin\omega = \sqrt{a^2 - ac\cot^2\omega},$$

est égale à a. La valeur de la même distance, lorsque ρ atteint le maximum, est

$$b = \sqrt{a^2 - ac\left(\frac{a}{c}-1\right)} = \sqrt{ac}.$$

Donc les constantes c et c' s'expriment en fonction de a et b par les formules

$$c = \frac{b^2}{a}, \quad c' = \frac{a^2}{b}.$$

Dans les deux cas considérés α est nul, c'est-à-dire que la normale passe par le centre. Elle se confond donc avec la droite focale dans le premier cas, et l'on démontre qu'elle lui est perpendiculaire dans le second en observant que l'inclinaison θ de la tangente sur la droite focale est donnée par la formule

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u+v}{u-v}\cot\omega = 3\frac{d\rho}{ds}\cot^2\omega,$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

qu'on transforme sans peine en celle-ci :

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{1 - \left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}}}.$$

Pour avoir la distance focale il suffit de voir ce que devient le second membre de (6) lorsque, ρ tendant vers c, ω tend vers $\frac{\pi}{2}$. Plus simplement, remarquons que, pour $\rho = c'$, la formule (6) donne $u = v = a$. On parvient ainsi à la construction des foyers, et l'on démontre que la demi-distance focale est $\sqrt{a^2 - b^2}$. Il est maintenant facile de se rendre compte de la forme de la conique, et l'équation intrinsèque permet en outre d'étudier l'*allure* de la courbe aux environs de chacun de ses points. En effet, la courbe définie par l'équation

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\varphi(\rho)}}$$

peut être assimilée, aux environs du point pour lequel $\rho = \rho_0$, à l'*alysoïde* représentée par l'équation

$$\rho = A + \frac{s^2}{B},$$

les paramètres ayant les valeurs

$$A = \rho_0 - \frac{\varphi(\rho_0)}{\varphi'(\rho_0)}, \quad B = \frac{4}{\varphi'(\rho_0)}.$$

Il faut, bien entendu, considérer sur l'alysoïde les environs du point séparé du sommet par un arc

$$s_0 = \frac{2\sqrt{\varphi(\rho_0)}}{\varphi'(\rho_0)}.$$

Dans le cas actuel

$$\varphi(\rho) = -9\left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[1 - \left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}\right],$$

$$\varphi'(\rho) = \frac{6}{\rho}\left[\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

En particulier

$$\varphi(c)=\varphi(c')=0,\quad \varphi'(c)=6\frac{a^2-b^2}{ab^2},\quad \varphi'(c')=-6\frac{a^2-b^2}{ab^2}.$$

Donc, en ses sommets, la courbe se comporte comme les alysoïdes

$$\rho=\frac{b^2}{a}+\frac{3(a^2-b^2)}{2ab^2}s^2,\quad \rho=\frac{a^2}{b}-\frac{3(a^2-b^2)}{2a^2b}s^2$$

aux environs de leurs sommets respectifs. Voyons quelle est son allure autour d'autres points remarquables. Au moyen des formules démontrées précédemment on peut exprimer la distance de la normale au centre, en fonction de ρ, comme il suit :

$$\alpha=a\sqrt{1+\left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}-\left[\left(\frac{c}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}.$$

Cette distance atteint sa plus grande valeur lorsque

$$\frac{c}{\rho}=\frac{\rho}{c'},$$

c'est-à-dire pour $\rho=\sqrt{cc'}=\sqrt{ab}$. Elle devient alors

$$\alpha=a\sqrt{1-2\left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}}=a-b.$$

Or on a

$$\varphi(\sqrt{ab})=\frac{9(a-b)^2}{ab},\quad \varphi'(\sqrt{ab})=\frac{6(a-b)^2}{ab\sqrt{ab}}.$$

Donc, aux environs du point considéré, la conique a même allure que l'alysoïde

$$\rho=-\frac{\sqrt{ab}}{2}+\frac{3(a-b)^2}{2ab\sqrt{ab}}s^2$$

autour du point dont la distance au sommet, comptée sur la courbe, est $\frac{ab}{a-b}$. Les formules précédentes ne sont pas applicables au point pour lequel l'écart angulaire entre la normale et le rayon vecteur issu du centre devient maximum. Évidemment pour ce point $\varphi'(\rho)$ est nul, d'où il suit qu'on doit avoir

$$\rho^3=\frac{1}{2}(c^{\frac{2}{3}}+c'^{\frac{2}{3}}).$$

Aux environs de ce point l'ellipse se comporte plutôt comme une spirale logarithmique autour d'un point autre que le pôle.

***

Nous allons faire une application de ce qui précède en cherchant les courbes telles que le segment intercepté sur une tangente quelconque par les côtés d'un angle fixe soit divisé en parties égales par le point de contact. On exprime d'abord que les côtés de l'angle sont fixes en écrivant

$$\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha \pm t} = -\frac{1}{\rho},$$

où α et β représentent les coordonnées cartésiennes du sommet, et $2t$ le segment intercepté par les côtés sur la tangente. Les transformées des formules (1) étant

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho} - 1, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho},$$

la différentiation indiquée précédemment donne

$$\beta\rho + t^2 = 0, \quad \beta\rho\frac{dt}{ds} = t\alpha.$$

On peut mettre la dernière relation sous la forme que voici :

$$\frac{1}{t}\frac{dt}{ds} = \frac{\alpha}{\beta\rho} = -\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{ds},$$

et en déduire, successivement,

$$\beta = \frac{c^2}{t}, \quad \rho = -\frac{t^3}{c^2}, \quad \alpha = -t\frac{dt}{ds}.$$

D'ailleurs, si l'on appelle φ la valeur de l'angle, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 2\beta t\cot\varphi.$$

Donc

$$s = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2 - \frac{c^4}{t^2} + 2c^2\cot\varphi}};$$

puis, par substitution de t en fonction de ρ,

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{4}{3}} + 2\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\cot\varphi - 1}}.$$

C'est l'équation d'une hyperbole, dont les axes ont avec les constantes c et φ les relations

$$ab = c^2, \quad a^2 - b^2 = 2c^2 \cot \varphi,$$

lesquelles donnent

$$a = c\sqrt{\cot\frac{\varphi}{2}}, \quad b = c\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

En particulier, lorsque l'angle est droit, on obtient l'équation intrinsèque de l'*hyperbole équilatère :*

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}.$$

Il est curieux que le simple changement du coefficient de l'intégrale suffise pour que l'équation représente une courbe tout à fait différente. Ainsi, en écrivant $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{1}{3}$, on obtient l'équation d'une *ligne de Ribaucour* particulière, caractérisée par la propriété suivante : le centre de courbure est symétrique, par rapport à la tangente, du milieu du segment de normale compris entre la tangente et une droite fixe (*directrice*). Néanmoins cette courbe est dans une relation remarquable avec l'hyperbole équilatère; car, en supposant que les deux lignes, convenablement choisies, roulent l'une sur l'autre, la directrice de l'une ne cesse de passer par le centre de l'autre.

On est naturellement porté à généraliser la question qui précède en remplaçant les deux droites fixes par un faisceau quelconque; mais on rencontre alors des courbes, qui ne ressemblent en rien aux coniques. Prenons comme exemple le cas de trois droites concourantes, qui divisent le plan en trois régions égales, et écrivons que leurs points de rencontre avec une tangente quelconque ont pour barycentre le point de contact. On trouve

$$3\cot\omega = \cot\varphi + \cot(\varphi + 120^\circ) + \cot(\varphi - 120^\circ),$$

et le second membre ne diffère pas de $3\cot 3\varphi$. Donc $\omega = 3\varphi$, à moins d'un multiple de π; puis, en différentiant,

$$2u + \rho\sin\omega = 0.$$

Cette relation, qui fournit le moyen de construire très simplement le

cercle osculateur, montre en même temps que la courbe cherchée est une *spirale sinusoïde*. Du reste, deux nouvelles différentiations donnent, successivement,

$$\frac{d\rho}{ds} = 5\cot\omega, \quad \rho\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{15}{\sin^2\omega}.$$

On en déduit, par élimination de ω, l'équation différentielle

$$3\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 5\rho\frac{d^2\rho}{ds^2} + 75 = 0,$$

dont l'intégration conduit à l'équation intrinsèque

$$s = \frac{1}{5}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{5}{6}} - 1}}.$$

Celle-ci représente une courbe du sixième ordre, à trois branches hyperboliques, asymptotes aux droites données. Chacun de ses points est le barycentre des points de rencontre de la tangente avec les trois asymptotes. Cette courbe se distingue parmi les spirales sinusoïdes à cause d'une particularité intéressante. Imaginons qu'un point la parcoure avec une vitesse proportionnelle à la racine carrée de la distance au pôle. Les composantes de l'accélération, suivant la normale et la tangente, sont respectivement proportionnelles à

$$\frac{2u}{\rho} = -\sin\omega, \quad \frac{du}{ds} = -\cos\omega.$$

Il en résulte que le mouvement peut être considéré comme ayant lieu sous l'action d'une répulsion *constante*, émanant du pôle.

***

D'une manière analogue, on peut étudier les courbes définies par l'équation $uv = a^2$. Une première différentiation, faite en tenant compte des relations (1), fournit la construction de la tangente : le segment de cette droite, limité aux perpendiculaires élevées par les foyers aux rayons vecteurs, est divisé en parties égales par le point de contact. Dans le cas actuel, il est préférable d'appeler u et ω les coordonnées polaires du centre, situé sur la droite qui joint les foyers, à une dis-

tance b de chacun d'eux. Cela étant, les valeurs des rayons vecteurs sont données par l'expression

$$\sqrt{u^2 \pm 2bu\cos\theta + b^2},$$

θ étant l'inclinaison de l'axe focal sur le rayon vecteur issu du centre. Évidemment

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\omega}{u}.$$

L'équation de définition devient

$$u^4 - 2b^2u^2\cos^2\theta + b^4 = a^4,$$

et l'on en tire, par différentiation,

$$u^2\cos\omega = b^2\cos(2\theta - \omega). \tag{9}$$

On obtient ensuite, en éliminant u,

$$a^2\cos\omega = b^2\sin 2\theta. \tag{10}$$

Maintenant on peut écrire, au lieu de (9),

$$u^2 = a^2\sin\omega + b^2\cos 2\theta,$$

d'où l'on déduirait sans peine les expressions de u en fonction de ω ou de θ. Inversement, il est aisé de voir que

$$\sin\omega = \frac{u^4 + a^4 - b^4}{2a^2u^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{u^4 - a^4 + b^4}{2b^2u^2}. \tag{11}$$

En conséquence, si l'on intègre la première des équations (1),

$$s = \int \frac{2a^2u^2\,du}{\sqrt{-[u^4 - (a^2 + b^2)^2][u^4 - (a^2 - b^2)^2]}}. \tag{12}$$

Cela posé, différentions (10). Il vient

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin\omega}{u} + \frac{2u}{a^2},$$

d'où la construction du centre de courbure. Enfin, si l'on substitue ω en fonction de u, on trouve

$$\rho = \frac{2a^2u^3}{3u^4 - a^4 + b^4}, \tag{13}$$

et l'élimination de u entre (12) et (13) conduirait à l'équation intrinsèque

des *cassinoïdes*. Cette élimination est bien facile dans le cas particulier de $a = b$. On a alors

$$s = \int \frac{2a^2 du}{\sqrt{4a^4 - u^4}}, \quad \rho = \frac{2a^2}{3u},$$

et l'on obtient

$$s = 3\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^4 - 1}},$$

où

$$c = \frac{a}{3}\sqrt{2}.$$

Telle est l'équation intrinsèque de la *lemniscate*. Elle montre que ρ croît constamment et indéfiniment depuis c, qui est sa plus petite valeur. Lorsque ρ est infini, u est nul. En outre, comme les formules (11) deviennent

$$\sin \omega = \cos 2\theta = \frac{u^2}{2a^2},$$

on voit que, dans le cas considéré, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donc la courbe passe par le centre, où elle subit une inflexion, et rencontre l'axe focal sous un angle de 45°. Lorsque $\rho = c$, les formules précédentes donnent

$$u = a\sqrt{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

La courbe finit donc par rencontrer orthogonalement l'axe focal, à une distance $a\sqrt{2}$ du centre. Des considérations de symétrie permettent de la compléter : on reconnaît qu'elle se compose de quatre arcs égaux à celui qu'on vient de décrire, se raccordant entre eux. Elle a donc la forme d'un *huit*, et son équation intrinsèque en fait immédiatement connaître la longueur totale :

$$12\int_c^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^4 - 1}}.$$

Ici aussi nous pouvons remarquer que, par le changement du coefficient 3 en 2 dans l'équation de la lemniscate, on vient à représenter une autre

ligne de Ribaucour, caractérisée par la propriété suivante : le centre de courbure est au milieu du segment de normale compris entre la tangente et une droite fixe. Si l'on met cette courbe en contact avec une lemniscate convenable, et qu'on fasse rouler les deux lignes l'une sur l'autre, le centre de la lemniscate reste constamment sur la directrice de la courbe considérée. Cette courbe est aussi le lieu du centre d'une hyperbole équilatère roulant sur une droite, et l'enveloppe de la directrice d'une chaînette, roulant à l'extérieur d'une chaînette égale.

La lemniscate est la seule cassinoïde qui passe par le centre; car, si $a \gtrless b$, les seconds membres des formules (11) deviennent infinis pour $u = 0$, ce qui ne peut être. Pour la même raison, u ne peut devenir infini, c'est-à-dire que les cassinoïdes ont tous leurs points à distance finie. Il est d'ailleurs facile de voir quelles sont les limites entre lesquelles u peut varier. En effet, pour que le second membre de (12) soit réel, il faut que u^2 ne surpasse pas $a^2 + b^2$ et ne soit jamais inférieur à la valeur absolue de $a^2 - b^2$. Remarquons maintenant que, d'après (11), $\sin\theta$ est nul, soit pour $u^2 = a^2 + b^2$, soit pour $u^2 = b^2 - a^2$; d'où il suit que la courbe rencontre l'axe en quatre points lorsque $b > a$, et en deux seulement lorsque $b < a$. On reconnaît d'ailleurs, à cause du mode de variation de u, qu'elle est constituée par deux ovales égaux dans le premier cas, et par une seule boucle fermée dans le second. C'est toujours sous un angle droit qu'elle rencontre l'axe focal, parce que, d'après (10), $\cos\omega$ s'annule en même temps que $\sin\theta$. En outre, comme la formule (9) donne

$$u = \pm b \text{ pour } \omega = \theta \gtrless \frac{\pi}{2},$$

on voit que les points les plus éloignés de l'axe appartiennent à la circonférence décrite sur la distance focale comme diamètre; mais il faut remarquer que cette circonférence ne rencontre pas la courbe si la valeur de u n'est pas comprise entre les limites trouvées plus haut : cela arrive lorsque $a > b\sqrt{2}$. De même, si l'on fait $u^2 = a^2 - b^2$, on voit, d'après (11), que θ devient égal à $\frac{\pi}{2}$, et l'on obtient, pour les cassinoïdes à une boucle, les points situés sur la perpendiculaire élevée par le centre à l'axe focal. Les circonférences qui ont ces points pour centres et a pour rayon, passent par les foyers. On parvient ainsi à une construction des

foyers, qui est tout à fait semblable à celle qu'on a trouvée pour les coniques. D'après la première des formules (11), la tangente ne passe par le centre que pour $u^4 = b^4 - a^4$. Cela ne peut donc arriver que dans les cassinoïdes à deux ovales ($b > a$). La discussion de (13) montre ensuite que la courbure atteint alors sa plus petite valeur. Sur les cassinoïdes à une boucle ($b < a$) on a quatre points d'inflexion, correspondant à la valeur $\frac{1}{2}(a^4 - b^4)$ de u^4, pourvu que cette valeur soit comprise entre les limites trouvées précédemment, et, par suite, que l'on ait $a < b\sqrt{2}$. Lorsque $a > b\sqrt{2}$, la cassinoïde est toute convexe, comme une ellipse, et sa courbure varie entre les limites

$$\frac{a^2 - 2b^2}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \frac{a^2 + 2b^2}{a^2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On voit qu'il y a, outre la lemniscate, une autre cassinoïde remarquable à considérer : elle correspond à l'hypothèse $a = b\sqrt{2}$, et ressemble assez à une ellipse dont les sommets situés sur le petit axe seraient, avec les foyers, les sommets d'un carré. Toutes ces courbes se déduisent très facilement de deux circonférences, ayant le rayon $\frac{a^2}{b}$ et leurs centres aux foyers. Il faut employer, pour cela, une construction connue, qui consiste à remplacer le point dont l'affixe est z par celui dont l'affixe est $\sqrt{bz}$. On obtient : 1° les cassinoïdes à deux ovales lorsque les circonférences ne se coupent pas; 2° les cassinoïdes à une boucle, affectée de concavités, lorsque les circonférences se coupent de manière que le centre de chacune d'elles reste extérieur à l'autre; 3° les cassinoïdes à un ovale lorsque le centre de chaque cercle est intérieur à l'autre cercle.

Les discussions que nous venons de faire montrent suffisamment, croyons-nous, combien il est aisé d'aborder certaines questions par la *méthode intrinsèque*, qui est la traduction analytique la plus *directe* de la méthode géométrique des infiniment petits. C'est à ce fait qu'elle doit sans doute tous ses avantages, et, aussi, quelques-uns de ses défauts.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Définition et limite de la somme algébrique de plusieurs quantités incommensurables(*).

1. *Rappel de quelques définitions relatives aux nombres incommensurables* (**). Si par un procédé quelconque, on parvient à distinguer les nombres commensurables en deux groupes $(a_1, a_2, a_3, \text{etc})$, $(A_1, A_2, A_3, \text{etc})$ tels que tout nombre du premier groupe soit inférieur à un nombre quelconque du second, et sans qu'aucun nombre commensurable sépare ces deux groupes, on dit qu'ils sont séparés par un nombre incommensurable α. Par convention, α est dit supérieur à tout nombre a_m du premier groupe, et inférieur à tout nombre A_n du second; $\alpha - a_m$ et $A_n - \alpha$ sont regardés comme une partie de $A_n - a_m$. Par suite, en étendant aux incommensurables la notion de limite, on peut dire que α est la limite commune des incommensurables a_m, A_n lorsque $A_n - a_m$ a zéro pour limite.

Deux incommensurables α, β sont dits inégaux; s'il existe un nombre commensurable c compris entre α et β, c'est-à-dire supérieur à tout nombre a_m commensurable inférieur à α et inférieur à tout nombre commensurable B_n supérieur à β. On dit encore, dans ce cas, que β est supérieur à α et que $\beta - \alpha$ est une partie de $B_n - a_m$.

2. *Définition de la somme algébrique* $\lambda + \mu - \nu$ *de plusieurs nombres incommensurables* λ, μ, ν. 1° Soient l, m, n trois nombres commensurables variables croissants, et L, M, N trois nombres commensurables variables décroissants, ayant respectivement les nombres incommensurables λ, μ, ν pour limites. On a donc

$$\lim (L - l) = 0, \quad \lim (M - m) = 0, \quad \lim (N - n) = 0. \qquad (1)$$

De plus, n étant croissant, $-n$ est décroissant; N étant décroissant, $-N$ est croissant.

(*) Selon nous, on ne peut exiger la connaissance des démonstrations relatives aux incommensurables que des élèves d'élite des classes supérieures des établissements d'enseignement moyen. Pour les autres, il suffit qu'ils connaissent les définitions et les énoncés.

(**) Voir, par exemple, *Mathesis*, t. V, pp. 49-53, ou t. VI, p. 265-266.

2° Puisque l'on a

$$l < L, \quad m < M, \quad n < N \quad \text{ou} \quad -N < -n, \tag{2}$$

on a aussi

$$l + m - N < L + M - n.$$

Ensuite, puisque l, m, $-N$ sont des quantités croissantes, il en est de même de la somme $l + m + (-N)$. Donc, d'après le principe fondamental de la théorie des limites (*), $l + m - N$ a une limite finie σ.

3° La somme $L + M - n$, supérieure à $l + m - N$, d'après les inégalités (2), est décroissante puisque les nombres L, M, $-n$ sont décroissants; donc elle a aussi une limite finie Σ, d'après le principe fondamental de la théorie des limites.

4° $\Sigma = \sigma$; car, soit, s'il est possible, c un nombre commensurable compris entre σ et Σ, et tel, par conséquent, que l'on ait

$$l + m - N < c < L + M - n.$$

On déduit de là

$$c - (l + m - N) < L + M - n - (l + m - N),$$
$$L + M - n - c < L + M - n - (l + m - N),$$

ou encore

$$c - (l + m - N) < (L - l) + (M - m) + (N - n),$$
$$(L + M - n) - c < (L - l) + (M - m) + (N - n).$$

La somme des différences $(L - l)$, $(M - m)$, $(N - n)$, dont chacune devient et reste aussi petite que l'on veut, jouit aussi de cette propriété; donc

$$\lim (l + m - N) = c, \quad \lim (L + M - n) = c,$$

c'est-à-dire $\sigma = c$, $\Sigma = c$, ce qui est contraire à l'hypothèse que σ et Σ sont inégaux. On a donc $\Sigma = \sigma$.

5° Les sommes

$$l + m - n, \quad l + M - n, \quad L + m - n,$$
$$L + M - N, \quad l + M - N, \quad L + m - N,$$

(*) *Un nombre toujours croissant a une limite finie ou infinie* (Voir *Mathesis*, t. V, pp. 193-196). La limite est finie, si le nombre variable reste toujours inférieur à une quantité finie donnée.

sont intermédiaires entre

$$l+m-\mathrm{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}+\mathrm{M}-n$$

d'après les inégalités (2); elles ont donc aussi σ pour limite (*).

6° En résumé, les huit sommes algébriques

$$(l \text{ ou } \mathrm{L})+(m \text{ ou } \mathrm{M})-(n \text{ ou } \mathrm{N})$$

ont une limite commune σ. Par conséquent, on peut donner la définition suivante :

La somme $\lambda+\mu-\nu$ *des nombres incommensurables* $\lambda, \mu, -\nu$, *est la limite* σ *de la somme des nombres commensurables* l *ou* L, m *ou* M, $-n$ *ou* $-\mathrm{N}$, *qui ont respectivement* $\lambda, \mu, -\nu$ *pour limites.*

3. *La somme* $\lambda+\mu-\nu$ *est unique.* Soient l', m', n' trois nombres commensurables variables croissants, et L', M', N' trois nombres commensurables variables décroissants ayant aussi λ, μ, ν respectivement pour limites. On prouve comme plus haut que les huit sommes

$$(l' \text{ ou } \mathrm{L}')+(m' \text{ ou } \mathrm{M}')-(n' \text{ ou } \mathrm{N}')$$

ont une limite commune σ'. Je dis que $\sigma=\sigma'$. En effet, d'après la définition des nombres l, m, n; l', m', n'; L, M, N; L', M', N', on a

$$l'<\mathrm{L}, \quad m'<\mathrm{M}, \quad n'<\mathrm{N} \quad \text{ou} \quad -\mathrm{N}<-n',$$
$$l<\mathrm{L}', \quad m<\mathrm{M}', \quad n<\mathrm{N}' \quad \text{ou} \quad -\mathrm{N}'<-n.$$

On tire aisément de là

$$l'+m'-\mathrm{N}'<\mathrm{L}+\mathrm{M}-n, \quad l+m-\mathrm{N}<\mathrm{L}'+\mathrm{M}'-n',$$

et, par suite, d'après un principe de la méthode des limites (**),

$$\lim(l'+m'-\mathrm{N}')\leqq\lim(\mathrm{L}+\mathrm{M}-n), \quad \lim(l+m-\mathrm{N})\leqq\lim(\mathrm{L}'+\mathrm{M}'-n')$$

c'est-à-dire

$$\sigma'\leqq\sigma, \quad \sigma\leqq\sigma',$$

relations d'où il résulte que $\sigma=\sigma'$.

4. *Limite d'une somme* $(u+v-w)$ *de variables finies, commensurables ou incommensurables.* La démonstration de la relation

$$\lim(u+v-w)=\lim u+\lim v-\lim w \qquad (\mathrm{A})$$

(*) *Si deux quantités variables inégales ont une limite commune, toute quantité intermédiaire Z a la même limite.* (Voir, par exemple, *Mathesis*, t. VI, pp. 268-269.)

(**) *La limite d'une variable toujours supérieure à une autre variable est égale ou supérieure à la limite de celle-ci.* (Voir, par exemple, *Mathesis*, t. VI, pp. 269-271.)

donnée précédemment (*Mathesis*, pp. 35-37), s'appliquait seulement au cas où tous les nombres considérés sont commensurables.

Maintenant que nous avons établi le sens exact que l'on peut attribuer aux sommes algébriques de nombres incommensurables, elle peut être étendue, avec des modifications insignifiantes, au cas où l'une ou plusieurs des quantités u, v, w, $u+v-w$, $\lim u$, $\lim v$, $\lim w$, $\lim(u+v-w)$ sont incommensurables. Nous regarderons donc la relation (A) comme établie d'une manière générale. (P. M.)

SURFACE ET VOLUME DU TORE.

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

Lorsque l'on n'a en vue d'établir que la mesure du tore, et non aussi celle de l'anneau polygonal régulier, la méthode exposée dans notre précédent article(*) peut être considérablement abrégée(**).

Soient AB, A'B' deux droites symétriques par rapport à une droite PQ(***). Supposons que la figure ABB'A' tourne autour d'un axe XY parallèle à PQ et proposons-nous de trouver le volume engendré par cette figure ainsi que la somme des surfaces engendrées par les droites AB, A'B'.

1° Soient a, a', b, b' les distances des points A, A', B, B' à l'axe XY, et d la distance des parallèles PQ, XY ; soient 2α et 2β les longueurs des droites AA', AB', et δ la distance des mêmes droites ; enfin, soit l la longueur commune des droites AB, A'B'. On a :

$$\begin{aligned}\text{Surf. AB} + \text{surf. A'B'} &= \pi(a+b)\,l + \pi(a'+b')\,l \\ &= \pi(a+b+a'+b')\,l \\ &= \pi(d+\alpha+d+\beta+d-\alpha+\delta-\beta)\,l \\ &= 4\pi dl = 2\pi d(\text{AB}+\text{A'B'}).\end{aligned}$$

Cette formule subsiste, si l'on remplace AB, A'B' par deux lignes polygonales quelconques, symétriques par rapport à PQ.

(*) Voir *Mathesis*, tome X, page 190.

(**) Voir Catalan, *Éléments de Géométrie*, deuxième édition, page 343.

(***) Le lecteur est prié de faire la figure.

2° Supposons maintenant que B et B′ se confondent en un même point O situé sur PQ ; on aura :

$$\begin{aligned}\text{vol. OAA}' &= \tfrac{1}{3}\pi\delta\,(d^2 + da + a^2) - \tfrac{1}{3}\pi\delta\,(d^2 + da' + a'^2)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\delta\,(da - da' + a^2 - a'^2)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\delta\,[d(a-a') + (a+a')(a-a')]\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\delta\,(a-a')(d+a+a')\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\delta\,.\,2\alpha\,.\,(d+d+\alpha+d-\alpha)\\ &= 2\pi d\alpha\delta = 2\pi d\,.\,\text{OAA}'.\end{aligned}$$

Si B et B′ ne se confondent pas en un même point, prolongeons AB et A′B′ jusqu'à leur rencontre en O avec PQ ; on aura :

$$\begin{aligned}\text{vol. ABB'A'} &= \text{vol. OAA}' - \text{vol. OBB}'\\ &= 2\pi d\,.\,\text{OAA}' - 2\pi d\,.\,\text{OBB}'\\ &= 2\pi d\,.\,\text{ABB'A}'.\end{aligned}$$

Cette formule subsiste, si l'on remplace AB, A′B′ par deux lignes polygonales quelconques, symétriques par rapport à PQ.

Cela posé, soient r le rayon du cercle générateur du tore, et d la distance du centre à l'axe XY. Menons le diamètre parallèle à XY et inscrivons, dans les deux demi-cercles, deux demi-polygones symétriques par rapport à ce diamètre. Soient p le périmètre et s la surface du polygone entier. D'après ce qui précède, on a, pour la surface et le volume engendrés par le polygone,

$$S = 2\pi d\,.\,p, \quad V = 2\pi d\,.\,s.$$

Si l'on augmente indéfiniment le nombre des côtés, et que l'on passe à la limite, il vient, pour la surface et le volume du tore,

$$S = 2\pi d\,.\,2\pi r = 4\pi^2 dr,$$
$$V = 2\pi d\,.\,\pi r^2 = 2\pi^2 dr^2.$$

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS ;

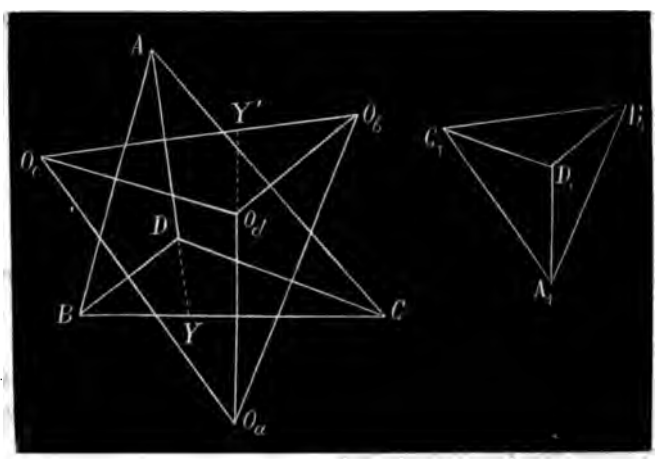
par M. J. Neuberg.

(Suite ; voir *Mathesis*, p. 33.)

4. Si dans la figure ci-jointe on fait abstraction de la situation relative des quadrangles ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ (ou $O_aO_bO_cO_d$), on peut caractériser ainsi les rapports qui existent entre ces deux figures. Le faisceau des vecteurs D_1A_1, D_1B_1, D_1C_1 est égal à celui de trois parallèles menées aux

côtés du triangle ABC, et le faisceau des vecteurs DA, DB, DC est égal à celui de trois parallèles menées aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$. Le lecteur familiarisé avec la théorie de l'involution, peut s'expliquer autrement ces relations.

Une transversale coupe les trois couples de côtés opposés du quadrangle ABCD en trois couples de points conjugués d'une involution; si la transversale est la droite à l'infini, on voit que les parallèles menées par un même point aux côtés du quadrangle sont les rayons d'un faisceau involutif; l'involution étant une relation symétrique, il existe aussi un triangle tel que les côtés sont parallèles aux vecteurs DA, DB, DC et, que les parallèles menées par les sommets de ce triangle aux côtés de ABC concourent en un même point.



Les quadrangles ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ ont été appelés *quadrangles métapolaires* (Neuberg et Gob, *Sur les foyers de Steiner*). Voici la raison de cette dénomination. Si A'B'C' est le triangle polaire de ABC par rapport à un cercle quelconque décrit de D comme centre, les côtés B'C', C'A', A'B' sont perpendiculaires aux vecteurs DA, DB, DC; les droites DA', DB', DC' sont perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB. Donc la figure A'B'C'D est semblable à $A_1B_1C_1D_1$ et $O_aO_bO_cO_d$.

3. Deux quadrangles ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ sont dits *affins*, lorsqu'ils vérifient les relations

$$\frac{\textit{aire}\ ABC}{\textit{aire}\ A_1B_1C_1} = \frac{BCD}{B_1C_1D_1} = \frac{CDA}{C_1D_1A_1} = \frac{DAB}{D_1A_1B_1}. \qquad (1)$$

Deux sommets homologues D, D_1 ont les mêmes coordonnées barycentriques dans les triangles correspondants ABC, $A_1B_1C_1$; deux côtés opposés AB, CD de l'un des quadrangles se divisent mutuellement dans les mêmes rapports que les côtés correspondants A_1B_1, C_1D_1 de l'autre quadrangle.

Il est facile de voir que deux quadrangles métapolaires sont affins. En effet, si Y est le point de rencontre de BC avec AD, Y′ celui de O_bO_c avec O_aO_d, les triangles ABY et O_cO_dY', ACY et O_bO_dY' ont les côtés perpendiculaires; par conséquent,

$$\frac{BY}{AY}=\frac{O_dY'}{O_cY'},\quad \frac{CY}{AY}=\frac{O_dY'}{O_bY'};$$

d'où

$$\frac{BY}{CY}=\frac{O_bY'}{O_cY'}.$$

On parvient plus rapidement à ce résultat en menant AU parallèle à BC, O_dU' parallèle à O_cO_b et en coupant les faisceaux égaux A(BCYU), $O_d(O_cO_bU'Y')$ par les transversales BC, O_lO_c.

Enfin, si l'on désigne par a, b, c, A, B, C les côtés et les angles du triangle ABC, et par A′, B′, C′ les angles du triangle $O_aO_bO_c$, on trouve facilement

$$O_dM_{bc}=\tfrac{1}{2}a\cot A,\quad O_aM_{bc}=\tfrac{1}{2}a\cot A',\quad \ldots,$$

$$O_aO_d=\tfrac{1}{2}a(\cot A\pm\cot A'),\quad O_bO_d=\tfrac{1}{2}b(\cot B\pm\cot B'),\quad \ldots,$$

$$\text{aire } O_aO_bO_d=\tfrac{1}{2}O_aO_d\,.\,O_bO_d\sin C=ABC(\cot A\pm\cot A')(\cot B\pm\cot B');$$

d'où l'on conclut que les aires $O_bO_cO_d$, $O_cO_aO_d$, $O_aO_bO_d$ ou les coordonnées barycentriques de O_d dans le triangle $O_aO_bO_c$ sont inversement proportionnelles aux quantités

$$\cot A\pm\cot A',\quad \cot B\pm\cot B',\quad \cot C\pm\cot C'.$$

La forme de ces expressions montre que le point D a les mêmes coordonnées barycentriques dans le triangle ABC (Il faut prendre la somme ou la différence des cotangentes suivant que les triangles ABC, $O_aO_bO_c$ ont une même orientation ou non).

6. La propriété que nous venons d'établir conduit à ce joli théorème de mécanique : *Si quatre forces parallèles appliquées aux points* A, B, C, D *se font équilibre, l'équilibre subsiste encore après qu'on les a transportées parallèlement aux centres des cercles circonscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC.

Soient ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ deux quadrangles affins. Appliquons aux sommets du premier les forces parallèles $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$; aux sommets du second les forces parallèles $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$, $n\delta$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ont la signification indiquée au 1°). Ces deux groupes de forces étant en équilibre, on voit facilement, en composant les forces $m\alpha$ et $n\alpha$, $m\beta$ et $n\beta$, ..., que les points A_2, B_2, C_2, D_2 divisant les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 dans un même rapport $m : n$ sont les sommets d'un troisième quadrangle affin aux deux premiers. Si ceux-ci sont directement semblables entre eux, ils sont aussi semblables au quadrangle $A_2B_2C_2D_2$.

Les centres de gravité des triangles BCD, CDA, ... et les centres des cercles circonscrits sont les sommets de deux quadrangles $G_aG_bG_cG_d$, $O_aO_bO_cO_d$ affins au quadrangle ABCD. Par conséquent : 1° *Les centres des cercles des neuf points des triangles* BCD, CDA, ... *sont les sommets d'un quadrangle* $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$ *affin au quadrangle* ABCD ; 2° *les orthocentres* H_a, H_b, ... *de ces triangles jouissent de la même propriété.* Il y a plus : *les triangles* $H_aH_bH_c$, $H_bH_cH_d$, ... *sont équivalents aux triangles* ABC, BCD, ... (voir *Mathesis*, t. II, p. 132). (*A continuer.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 439(**).

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 119.)

Soient C *un point fixe d'une corde* BD *d'un cercle* ω, A *un point quelconque de la circonférence.* 1° *Trouver le lieu du point de rencontre* M *des hauteurs du triangle* ABC. 2° *Examiner les cas où ce lieu est une strophoïde ou une cissoïde.* 3° *On obtient différentes courbes, lorsque le point* C *se déplace sur* BD ; *démontrer que les tangentes à ces courbes aux points qui correspondent à un même point* A *du cercle* ω *se coupent en un même point* N ; 4° *Le lieu de* N *est une cardioïde.* (JEŘÁBEK.)

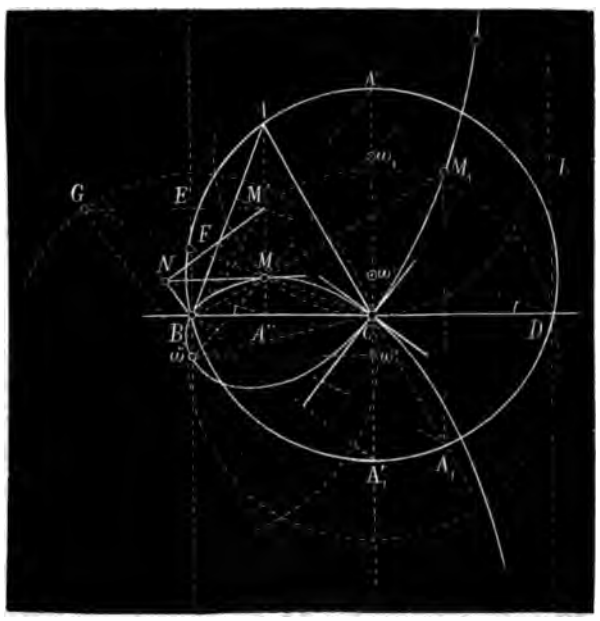
Solution par M. JEŘÁBEK. 1° Le lieu (M) est une cubique circulaire. En effet, une droite quelconque menée par C coupe la circonférence ω en

---

(*) Nous avons reçu de bonnes solutions de la question 695, par MM. Déprez et Brandza, de 696, par MM. Déprez, Laurens, Lalisse et Baudran.

(**) Les notations de l'énoncé ont été mises en rapport avec la figure ci-jointe, et le n° 3, qui supposait le cas particulier où BD est un diamètre du cercle ω, est énoncé ici d'une manière générale.

deux points A, A_1 ; les orthocentres M, M_1 des triangles ABC, A_1BC sont sur une même droite passant par B. Soit α le point où la perpendiculaire élevée en B sur BD rencontre la circonférence ω ; B est l'orthocentre du triangle rectangle αBC. Donc une droite menée par B coupe le lieu (M) en trois points B, M, M_1. La tangente en B est, évidemment, perpendiculaire sur $C\alpha$. Chacun des points cycliques du plan est l'orthocentre du triangle qui a pour sommet ce point et pour base la droite BC. Les tangentes aux points cycliques se coupent en B de sorte que B est le foyer de la cubique circulaire. C' est le point double de la courbe, et les



tangentes en ce point sont perpendiculaires sur les droites joignant B aux points A', A'_1 où une perpendiculaire élevée en C sur BD coupe la circonférence ω.

On démontre facilement que la courbe (M) est une cissoïdale. En effet, soit M' l'orthocentre du triangle ABD; les droites CM, DM' sont parallèles et le lieu de M' est une circonférence ω', symétrique de la circonférence ω par rapport à BD. Par conséquent, si l'on mène la droite M'G égale et parallèle à DC, le lieu de G est une circonférence ω'', et G est situé sur CM. Désignons par D' le symétrique de D par rapport à

C et par F, E les points de rencontre de CG, M'G avec la perpendiculaire élevée en D' sur BC. Comme CD' = M'G, M'E = A''D (A'' est la projection de A sur CB) on a CA'' = EG, d'où CM = FG. Ainsi, la courbe (M) admet la construction suivante : On donne une circonférence ω'', une droite D'E, et un point C sur la circonférence ω''; une droite menée par C rencontre la courbe et la droite en G, F; on prend sur cette droite CM = FG.

2° Lorsque C est au milieu de BD (c'est le cas de la figure ci-jointe), D' se confond avec B, et ω'' est sur la droite D'E. Alors, comme GF = MC, le triangle ω''FM est isoscèle, et si ω''M coupe en ω_1 la perpendiculaire élevée en C sur BD, on a aussi $\omega_1 C = \omega_1 M$. On voit que le lieu de M est maintenant une strophoïde oblique; on obtient une strophoïde droite, si l'angle $\omega''C\omega_1$ est droit, ce qui exige que BD soit un diamètre de la circonférence ω.

Lorsque C est confondu avec B, ou mieux lorsque la base BC du triangle ABC, infiniment petite, est dirigée suivant un diamètre donné, les circonférences ω, ω' se confondent et la droite D'FE touche la circonférence ω''. On retrouve ainsi la construction classique de la cissoïde de Dioclès.

3° Revenons au cas général. Lorsque C se meut sur BD, A restant fixe, la droite CM se déplace parallèlement à elle-même, et les points C, M engendrent des divisions semblables. Considérons une seconde position a de A, et soient m', m les orthocentres des triangles aBD, aBC; si l'on suppose C mobile sur BD, les points M, m déterminent sur les parallèles AM', am' des ponctuelles semblables. Donc la droite Mm passe par un point fixe. Si a tend vers A, on voit que la tangente au point M de la courbe (M) passe par un point N, qui est indépendant de la distance BC, mais varie avec le point A.

4° Pour trouver le point N, nous supposons C successivement en D et au pied A'' de la hauteur AM'. La tangente à la courbe (M) sera alors, respectivement, la tangente à la circonférence ω' et la perpendiculaire abaissée de A'' sur AB.

L'angle NMB ayant même mesure que l'angle MDB, lequel est égal à NA''B, le quadrilatère NM'A''B est inscriptible. D'où l'on conclut que l'angle BNM' est droit; le lieu de N est donc la podaire de la circonférence ω'' par rapport à l'un de ses points.

Notes. 1° Si l'on prend pour axes BC et la perpendiculaire en B, les

ordonnées des points A, M satisfont à la relation $MA''.AA'' + A''B.A''C = 0$; donc, (x, y) désignant les coordonnées de l'un de ces points, celles de l'autre sont x, $\frac{x(c-x)}{y}$, et les équations des lignes décrites simultanément par ces points sont

$$f(x, y) = 0, \quad f\left(x, \frac{x(c-x)}{y}\right) = 0,$$

ou en coordonnées cartésiennes homogènes

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(xy, x(c-x), zy) = 0.$$

Dans le cas de la question 439, le point A parcourt une circonférence ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0;$$

donc le lieu de M est représenté par

$$x\{y^2 + (c-x)^2\} - 2ay^2 - 2by(c-x) = 0.$$

Lorsque $b = 0$, $a = c$, ou que $b = 0$, $c = 0$, on voit immédiatement que le lieu est une strophoïde ou une cissoïde. (Brocard et Déprez.)

2° Les points B et C étant supposés fixes, si A est un point variable et M l'orthocentre du triangle ABC, les points A et M satisfont à une transformation quadratique, dont l'étude générale présente un grand intérêt. Lorsque A parcourt une droite quelconque, les rayons BA, CA se correspondent dans deux faisceaux projectifs; il en sera donc de même des droites AM, BM et par suite, B engendre une conique. Les droites fondamentales de la transformation quadratique, évidemment réversible, sont BC et les perpendiculaires élevées en B et C sur BC; les points fondamentaux correspondants sont le point à l'infini sur la direction perpendiculaire à BC, et les points B, C.

Lorsque A parcourt une courbe d'ordre m, le point M décrit une ligne d'ordre $2m$. Si la première courbe a un point simple en B, la ligne (M) se décompose en la droite perpendiculaire en B à BC et en une courbe d'ordre $2m - 1$; ce cas particulier comprend la question 439. (J. N.)

3° La base BC d'un triangle ABC étant fixe, on peut étudier la transformation au moyen de laquelle on passe du sommet variable A à un point remarquable quelconque du triangle. Soient M l'orthocentre, Q le milieu de AM, E le milieu de BC, O_9 le centre du cercle des neuf points. Si A décrit une droite, M décrit une conique; on en déduit que le lieu de Q est

également une conique; donc O_9, milieu de EQ parcourt une ligne de second ordre.

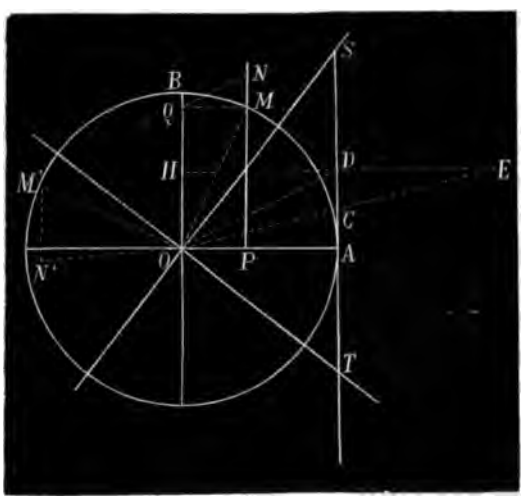
M. Déprez a cherché les lieux de plusieurs points remarquables du triangle ABC et l'enveloppe de certaines droites remarquables, lorsque A parcourt une droite ou une circonférence passant par B. Le défaut d'espace nous empêche de reproduire les intéressantes recherches de notre zélé correspondant. — Comparez aussi J. M. S., 1888, pp. 141-143, question 174 (DE LONGCHAMPS).

Question 689.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 176.)

Étant donné un cercle O, *on abaisse d'un point* M *de sa circonférence une perpendiculaire* MP *sur un rayon fixe* OA, *puis on prolonge* PM *de* MN = n . OP. 1° *Le lieu de* N *est une ellipse;* 2° *Trouver les axes de cette courbe;* 3° *Construire la tangente en* N.

(KEELHOFF.)



Solution par M. C. A. LAISANT. Si l'on prend pour unité le rayon du cercle, et si l'on pose OP = cos t, PM = sin t, il est clair que la longueur de MN sera $n \cos t$. Par conséquent, le lieu de N aura pour équipollence

$$(1) \qquad ON = \cos t + i(\sin t + n \cos t) = (1 + in)\cos t + i \sin t.$$

Par conséquent : 1° Ce lieu est une ellipse ayant pour demi-diamètres conjugués $1 + in$ et i, c'est-à-dire OD et OB, si l'on construit AD = n.OA et perpendiculaire à OA.

A prendre textuellement l'énoncé, il faudrait considérer aussi la courbe ayant pour équipollence $ON = (1 - in)\cos t + i \sin t$, et qui est une seconde ellipse symétrique de la première par rapport à OB. Mais

nous nous bornerons à l'ellipse (1), les propriétés de l'autre se déduisant de celle-ci, en vertu de cette symétrie.

2° Puisque OD, OB sont deux demi-diamètres conjugués, la construction classique nous montre qu'en abaissant DH perpendiculaire sur OB, et prolongeant HD en DE de sa longueur, la bissectrice OS de l'angle BOE nous donnera la direction du grand axe; le petit axe sera dirigé suivant OT perpendiculaire à OS.

Les longueurs des demi-axes sont

$$(2) \qquad a = \tfrac{1}{2}(OE + OH), \quad b = \tfrac{1}{2}(OE - OH).$$

3° Puisque $ON = OD \cos t + OB \sin t$, la dérivée de ON par rapport à t est $-OD \sin t + OB \cos t$, ou

$$ON' = OD \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + OB \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right).$$

Donc, en prenant OM' perpendiculaire à OM, si nous construisons le point correspondant N', la droite ON' sera parallèle à la tangente en N.

On peut remarquer aussi que l'aire de l'ellipse est $\pi ab = \pi . OA'^2$, c'est-à-dire qu'elle est équivalente à celle du cercle.

Si F est un foyer de la courbe, les relations (2) montrent que la longueur $OF = \sqrt{a^2 - b^2}$ a pour expression $\sqrt{OE . OH}$, c'est-à-dire que OF est moyenne proportionnelle entre les deux droites OE, OH.

Solutions par MM. Sohie, Joachimescu, Brandza, Cristesco *et* de Bőzóky. Prenons pour axes le rayon OA et une perpendiculaire OB; nous trouverons pour équation du lieu

$$(y - nx)^2 + x^2 = r^2. \qquad (A)$$

La forme de cette équation montre que les droites représentées par $x = 0$, $y = nx$ sont des diamètres conjugués. Le point B est une extrémité du premier de ces diamètres, et, si sur la tangente en A au cercle O on prend la longueur $AD = nr$, D est une extrémité du second diamètre. La construction de Chasles conduit facilement à la connaissance des axes de la conique.

Les directions des axes résultent aussi très simplement de leurs équations

$$y = \left(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1}\right)x, \quad y = \left(\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1}\right)x. \qquad (B)$$

En effet, si sur la tangente AD au cercle on prend une longueur

$$AC = \frac{n}{2} r = \tfrac{1}{2} AD,$$

puis les longueurs CS = CT = CO, les droites OS, OT seront représentées par les équations (B) ; ce sont donc les axes cherchés.

La tangente au point N (x, y) de la courbe (A) a pour équation

$$(Y - nX)(y - nx) + Xx = r^2.$$

On voit aïsément que cette droite et la tangente au point M de la circonférence O se coupent sur OB.

Solution par Mme Prim *et* M. Jeřabek. Menons MQ perpendiculaire à OB et joignons NQ; le triangle MQN est d'espèce constante. On passe donc du lieu de M à celui de N en faisant tourner l'ordonnée de M relative à OB, d'un angle constant et en la multipliant par un nombre fixe. Cette transformation change, comme on le sait, une circonférence en une ellipse, ayant pour diamètres conjugués OB et une parallèle OD à QN; D est le point correspondant à A. Les tangentes aux points homologues M, N se coupent sur l'axe de transformation OB.

Solutions par MM. Decamps, Déprez, Lalisse, Laurens et Denys. Lorsque l'on fait varier n, les foyers et les sommets des ellipses dérivent des courbes ayant respectivement pour équations

$$x^2y^2 - r^2y^2 + r^2x^2 = 0, \quad x^4 + x^2y^2 - r^2y^2 = 0. \qquad \text{(Anonyme.)}$$

×Question 697.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 264.)

Par les sommets A, B, C ***d'un triangle et par trois points*** α, β, γ ***pris sur les côtés*** BC, CA, AB ***on fait passer trois circonférences*** $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$; ***puis par*** A, B, C ***trois parallèles*** AL, BM, CN ***rencontrant ces circonférences respectivement en*** L, M, N. ***Démontrer que*** L, M, N ***sont sur une même droite avec le point*** I, ***commun aux trois circonférences.***

(E. Catalan.)

Solution par Mme de Haas *et* Mlle Pompilianu, MM. I. Beyens (major du génie à Cadix), Vladimirescu, Cl. Thiry, Brandza, Mandart Liénard, Sohie, de Bőzóky, Cristesco, Decamps, Lalisse, Bellens, François. Les quadrilatères inscriptibles $A\beta IL$, $B\gamma IM$, $C\alpha IN$ montrent que les droites IL, IM, IN font avec la direction des trois parallèles

les mêmes angles que les droites $I\beta$, $I\gamma$, $I\alpha$ avec les côtés correspondants du triangle ABC. Or, les derniers angles sont égaux; donc IL, IM, IN sont sur la même droite.

REMARQUE. Le théorème proposé par M. Catalan est un cas particulier d'un théorème que M. Mannheim a énoncé dans l'*Educational Times*. Les notations étant celles qui sont adoptées ci-dessus, la proposition générale est celle-ci : *Les droites joignant* A, B, C *à un point quelconque* V *rencontrent les circonférences* $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ *en trois points* L, M, N *situés sur une même circonférence passant par* V *et* I.

M. Catalan a publié d'intéressants développements sur le théorème de M. Mannheim, dans les *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, 1890.

Le théorème de M. Mannheim peut être généralisé : Aux cercles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, LMNVI, on peut substituer des coniques passant par les mêmes points et par deux points donnés. Une démonstration analytique de la proposition généralisée a paru dans les *Nouvelles Annales*, 1890, p 556.

M Déprez étend le théorème de M. E. Catalan à un polygone de n côtés.

×Question 698.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 264.)

Étant donnés un point A ***et un angle*** CBD, ***trouver sur les côtés de l'angle deux points*** C, D ***équidistants de*** A ***et tels que l'angle*** CAD ***soit égal à un angle donné.*** (F. F.)

La question est un cas particulier de ce problème classique : ***Inscrire entre les côtés d'un angle donné*** CBD, ***un triangle*** ACD ***semblable à un triangle donné et ayant un sommet donné*** A. Nous pouvons donc nous borner à résumer les solutions que nous avons reçues.

1° *Solution par* MM. LAURENS *et* LALISSE. Soient C', D' les points où la circonférence ACD coupe une seconde fois les côtés de l'angle CBD. Les angles AC'C, AD'D sont égaux à l'angle ADC ou à son supplément, ce qui permet de déterminer les droites AC', AD' et de tracer ensuite la circonférence ACD.

2° *Solution par* M. DECAMPS. On peut construire une figure semblable à ACBD. Pour cela, sur les côtés d'un angle C'A'D' égal à l'angle donné, prenons deux longueurs égales A'C' = A'D' ; sur A'C' et A'D', construisons des segments capables des angles ABC, ABD; si B' est l'intersection des arcs de ces segments, faisons l'angle BAC = B'A'C', etc.

3° *Solution par* MM. KEELHOFF, DÉPREZ, SOLLERTINSKY *et* BELLENS. Soit

C_1 un point quelconque de BC; construisons l'angle C_1AD_1 égal à l'angle donné CAD et prenons sur le second côté une longueur $AD_1 = AC_1$. Lorsque C_1 parcourt la droite BC, B_1 parcourt une autre droite d, qui par son intersection avec BD détermine le point cherché D.

Si AC_1 est perpendiculaire à BC, d est perpendiculaire sur AB_1.

4° *Solution par* M. François. Soient P, Q, R, les projections de A sur BC, AD, CD. Les quadrilatères APCR, AQDR étant inscriptibles, les angles BPR, BQR sont égaux à CAR ou à la moitié de l'angle donné CAD. On tire de là un moyen de déterminer le point R.

Mme C. de Haas et M. Sohie ont donné de bonnes solutions trigonométriques de la même question; M. Vladimirescu, une bonne solution par la géométrie analytique.

M. Sollertinsky résout la même question en remplaçant la condition AC = AD par l'égalité BC = m . BD. La droite CD est, dans ce cas, parallèle à une direction donnée. On sait qu'une droite CD inscrite entre les côtés d'un angle donné CBD et vue d'un point fixe A sous un angle constant enveloppe une conique qui touche BC, BD et a pour foyer le point A. Le problème revient donc à mener à une conique donnée une tangente parallèle à une droite donnée; pour cela, on peut employer le cercle principal, lieu des projections du foyer sur les tangentes. M. Déprez signale également plusieurs généralisations de la question et étend le problème à la sphère. M. Liénard donne une solution fondée sur la considération de certaines coniques.

QUESTIONS D'EXAMEN.

471. Résoudre le système

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (1)$$

$$\cos a \cos b \,.\, x + \cos a \sin b \,.\, y + \sin a \,.\, z = 0, \qquad (2)$$

$$\cos a \cos c \,.\, x + \cos a \sin c \,.\, y + \sin a \,.\, z = 0. \qquad (3)$$

Quelles valeurs faut-il attribuer à tg a, tg b, tg c pour que les équations précédentes admettent comme solutions un système de valeurs de x, y, z égales entre elles, en supposant en outre que tg a = sin $\frac{1}{2}(b - c)$, et que a, b, c soient compris entre 0° et 360°. (*Baccalauréat*, Montpellier, 1889.)

Les équations (2) et (3) donnent

$$\frac{x \cos a}{\sin b - \sin c} = \frac{y \cos a}{\cos c - \cos b} = \frac{z \sin a}{\sin (c - b)},$$

ou

$$x = k \frac{\cos \frac{1}{2}(b + c)}{\cos a}, \quad y = k \frac{\sin \frac{1}{2}(b + c)}{\cos a}, \quad z = -k \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\sin a}.$$

L'inconnue auxiliaire k se détermine au moyen de (1); on trouve

$$k = \frac{\cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 a \cos^2 \frac{1}{2}(b-c)}}.$$

La condition $x = y = z$ s'exprime par les égalités

$$\cos \tfrac{1}{2}(b+c) = \sin \tfrac{1}{2}(b+c) = -\cot a \cos \tfrac{1}{2}(b-c),$$

d'où

$$\operatorname{tg} a = \sin \tfrac{1}{2}(b-c), \quad b+c = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b-c) = -\sqrt{2}.$$

472. Trouver la valeur de m qui rende négatif le trinôme

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1)$$

pour toutes les valeurs de x. (*Baccalauréat*, Nancy, 1889.)

Les racines du trinôme égalé à zéro doivent être imaginaires, ce qui exige $m > 1$ ou < -2; de plus, le coefficient de x^2 doit être négatif, ou $m < -1$. Donc il faut poser $m < -2$.

473. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0.$$

Réunir le premier et le troisième, le deuxième et le quatrième termes. Les racines sont

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

474. Démontrer que si un trinôme du second degré prend les valeurs 0, 1, 3 pour $x = 1, 2, 3$, il prend la valeur $(u-1)^2$ pour $x = u$.

(*Baccalauréat*, Besançon.)

Soit $ax^2 + bx + c$ le trinôme : faisant $x = 1, 2, 3$, on trouve

$$a+b+c=0, \quad 4a+2b+c=0, \quad 9a+3b+c=0;$$

d'où

$$a=1, \quad b=-2, \quad c=1.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***701 (Énoncé rectifié).** Soient : ABCD un rectangle inscrit dans la circonférence O; E le milieu de AD; G le point de rencontre de la circonférence avec la droite CE; F un point quelconque de la diagonale DB et K sa projectton sur AD; I le milieu du segment AK. 1° L'angle GIF = GAB. 2° Si par F on mène une parallèle à AD, rencontrant CE en N et BE en M, les cinq points F, N, D, G, T sont sur une même cir-

conférence tangente à FA 3° Si GF rencontre en P la circonférence ABCD en P, le quadrilatère BMFP est inscriptible, et les points A, M, P sont une parallèle à FI. 4° Les droites FI, AB se rencontrent sur la circonférence circonscrite au triangle AIG. (A. C.)

707. Deux cercles de rayons R, r ont leurs centres O, o sur une droite donnée; ils sont tels qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans le cercle O et ayant leurs côtés tangents au cercle o. Cela posé :

1° Trouver l'enveloppe du cercle de rayon r, si le cercle de rayon R est fixe.

2° Trouver l'enveloppe du cercle de rayon R si le cercle de rayon r est fixe.

3° Trouver le lieu du point de Lemoine des triangles inscrits au cercle de rayon R et dont les côtés touchent le cercle de rayon r, lorsque les deux cercles sont fixes. (E. Lemoine.)

×**708.** Dans tout triangle ABC, on a

$$(a \operatorname{tang} B - 2\gamma)(b \operatorname{tg} C - 2\alpha)(c \operatorname{tang} A - 2\beta)$$
$$= -(a \operatorname{tang} C - 2\beta)(b \operatorname{tg} A - 2\gamma)(c \operatorname{tang} B - 2\alpha),$$

α, β, γ étant les rayons des cercles ex-inscrits respectivement dans les angles A, B, C. (E. Gelin.)

×**709.** Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, on a également

$$\mathfrak{S}\frac{a^2-bc}{b+c}, \quad \mathfrak{S}\frac{b+c}{a^2-bc}=\frac{3}{abc}\mathfrak{S}a^3. \qquad \text{(Leudesdorf.)}$$

×**710.** Si la relation

$$(-r_1+r_2+r_3)(r_1-r_2+r_3)(r_1+r_2-r_3)=-8r_1r_2r_3,$$

existe entre les rayons r_1, r_2, r_3 des cercles exinscrits à un triangle, le périmètre du triangle est égal à $r_1+r_2+r_3$. (Leudesdorf.)

711. On considère une hyperbole équilatère H et le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence des normales issues d'un même point. Démontrer que les circonférences décrites sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres passent par le centre de H et, en ce point, sont mutuellement tangentes. (de Longchamps.)

Rectifications. La question 676 est inexacte. Nous publierons prochainement les communications que nous ont adressées à ce sujet MM. Jamet et Laisant.

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

par M. J. Neuberg.

(Suite, voir *Mathesis*, pp. 33, 67.)

7. Étant donné le quadrangle $O_aO_bO_cO_d$, qui a pour sommets les centres des cercles BCD, CDA, ..., comment peut-on retrouver le quadrangle ABCD ?

Dans le triangle BDC, la hauteur issue de D et le rayon DO_a du cercle circonscrit sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BDC; par suite, les droites O_aO_d et O_aD sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $O_bO_aO_c$ dont les côtés sont perpendiculaires à ceux de l'angle BDC. On conclut de là que les points D, O_d sont conjugués isogonaux (inverses) par rapport au triangle $O_aO_bO_c$; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un quadrangle complet $O_aO_bO_cO_d$, ***si l'on détermine l'inverse de chaque sommet par rapport au triangle formé avec les trois autres sommets, on obtient un nouveau quadrangle*** ABCD ***tel, que les points*** O_a, O_b, ... ***sont les centres des cercles circonscrits aux triangles*** BCD, CBA, ...

8. Soient D_a, D_b, D_c les projections de D sur les côtés du triangle ABC; A_b, A_c, A_d les projections de A sur les côtés CD, DB, BC du triangle BCD; et ainsi de suite. Soient aussi R_a, R_b, ... les rayons des cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, ..., et ρ_a, ρ_b ..., les rayons des cercles circonscrits aux triangles $A_bA_cA_d$,, $B_cB_dB_a$, ...

AD étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle AD_bD_c, on a

$$D_bD_c = AD \sin BAC = \frac{AD \cdot BC}{2R_d},$$

et par analogie

$$D_cD_a = \frac{BD \cdot CA}{2R_d}, \quad D_aD_b = \frac{CD \cdot AB}{2R_d}.$$

D'où

$$\frac{D_bD_c}{AD \cdot BC} = \frac{D_cD_a}{BD \cdot CA} = \frac{D_aD_b}{CD \cdot AB}.$$

Nous appelons ***triangle associé à un quadrangle complet*** ABCD, le triangle dont les côtés ont pour mesures les produits des côtés opposés

du quadrangle. Les formules précédentes montrent que *le triangle podaire d'un sommet d'un quadrangle complet par rapport au triangle des trois autres sommets est semblable au triangle associé au quadrangle; et que les côtés homologues des quatre triangles podaires sont proportionnels aux inverses des rayons des cercles circonscrits aux triangles ayant trois sommets communs avec le quadrangle.*

On a donc les égalités

$$\rho_a R_a = \rho_b R_b = \rho_c R_c = \rho_d R_d.$$

9. Voici une autre construction du triangle associé au quadrangle. Les droites AD, BD, CD rencontrent la circonférence ABC en trois nouveaux points M, N, P; soit p_d la puissance de D par rapport à la circonférence. Les triangles semblables NDP, CDB donnent

$$NP = \frac{BC \cdot ND}{CD} = \frac{BC \cdot ND \cdot BD \cdot AD}{CD \cdot BD \cdot AD} = BC \cdot AD \frac{p_d}{CD \cdot BD \cdot AD},$$

Par analogie

$$PM = CA \cdot BD \cdot q, \quad MN = AB \cdot CD \cdot q$$

q désignant le rapport $p_d : AD \cdot BD \cdot CD$. Le triangle MNP est donc semblable au triangle associé, et le rapport de similitude est égal à q.

On déduit de là un théorème assez curieux dû à VON STAUDT. L'aire du triangle MNP est égale $q^2 T$, T désignant l'aire du triangle associé; elle est aussi égale à

$$\frac{MN \cdot NP \cdot MP}{4R_d} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA \cdot AD \cdot BD \cdot CD \cdot q^5}{4R_d} = ABC \cdot AD \cdot BD \cdot CD \cdot q^5.$$

En égalant les deux valeurs de l'aire, on trouve

$$T = ABC \cdot AD \cdot BD \cdot CD \cdot q = ABC \cdot p_d.$$

D'après cela,

$$T = \alpha \cdot p_a = \beta \cdot p_b = \gamma \cdot p_c = \delta \cdot p_d.$$

Par conséquent : *Étant donné un quadrangle complet, le produit de l'aire d'un triangle qui a trois sommets communs avec le quadrangle, par la puissance du cercle circonscrit par rapport au sommet restant est constant et égal à l'aire du triangle associé au quadrangle.*

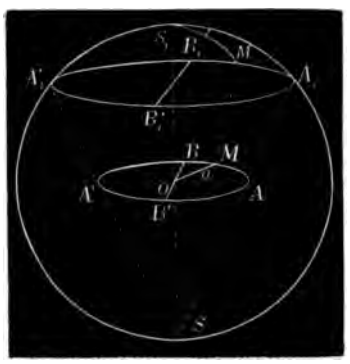
Pour une démonstration analytique de cette proposition, voir *Mathesis*, t. III, p. 30. (*A continuer.*)

AIRE DE L'ELLIPSE MICROSPHÉRIQUE ;

par M. C. E. WASTEELS, professeur agrégé.

1. J'appelle *ellipse microsphérique* la figure inverse d'une ellipse plane par rapport à un point situé sur la perpendiculaire élevée par le centre au plan de la conique.

Soient AA′, BB′ les axes et O le centre d'une ellipse plane. Décrivons une sphère quelconque de O comme centre, menons le diamètre SS_1 perpendiculaire au plan ABA′, et cherchons l'intersection de la sphère avec le cône qui a pour sommet S et pour base l'ellipse : la courbe $A_1B_1A'_1B'_1$ ainsi obtenue est une ellipse microsphérique.



2. Nous fixons un point quelconque M de l'ellipse plane par ses coordonnées polaires $r = OM$, $\theta = MOA$, et le point correspondant M_1 de l'ellipse microsphérique par ses *coordonnées polaires* $r_1 = S_1M_1$, $\theta = MOA$. Les triangles semblables SOM, SM_1S_1 donnent

$$r = \frac{Rr_1}{\sqrt{4R^2 - r_1^2}}, \quad r_1 = \frac{2Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}},$$

R étant le rayon de la sphère.

L'équation de ABA′B′ étant

$$r^2(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta) = a^2b^2,$$

celle de $A_1B_1A'_1B'_1$ sera

$$R^2r_1^2(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta) = 4R^2a^2b^2 - r_1^2a^2b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

ou

$$r_1^2[(R^2 + b^2)a^2 \sin^2\theta + (R^2 + a^2)b^2 \cos^2\theta] = 4R^2a^2b^2.$$

Le maximum et le minimum de r_1 correspondent respectivement à $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire aux axes OA, OB de l'ellipse plane ; en les désignant par a_1, b_1, on a

$$a_1^2 = \frac{4R^2a^2}{R^2 + a^2}, \quad b_1^2 = \frac{4R^2b^2}{R^2 + b^2},$$

et l'équation de l'ellipse microsphérique prend la forme

$$r_1^2 (a_1^2 \sin^2\theta + b_1^2 \cos^2\theta) = a_1^2 b_1^2. \qquad (1)$$

3. Soit σ l'aire d'une portion de sphère, comprise entre la courbe ayant pour équation $r_1 = f(\theta)$, et deux arcs de grand cercle S_1C, S_1M_1. Si r_1, θ sont les coordonnées de M_1, et r'_1, θ'_1 celles d'un point N_1 voisin de M_1 sur la courbe, l'aire $S_1M_1N_1$ est égale à l'aire comprise entre les grands cercles S_1M_1, S_1N_1 et l'arc de petit cercle décrit de S_1 comme pôle, avec un rayon r_3 intermédiaire entre r_1 et r_1. La zone entière qui correspond à ce cercle a pour mesure πr_3^2; par suite,

$$\frac{S_1M_1N_1}{\pi r_3^2} = \frac{\theta' - \theta}{2\pi}, \quad \text{et} \quad S_1M_1N_1 = \tfrac{1}{2} r_3^2 (\theta' - \theta),$$

formule identique à celle qui existe pour la courbe plane ayant pour équation $r_1 = f(\theta)$.

Il résulte de là que l'ellipse microsphérique a la même aire que l'ellipse plane ayant l'équation (1), c'est-à-dire

$$\pi a_1 b_1 = \frac{4\pi R^2 ab}{\sqrt{(R^2 + a^2)(R^2 + b^2)}}.$$

Remarque. Nous pouvons, d'une manière générale, appeler conique microsphérique l'inverse d'une conique plane par rapport à un point quelconque extérieur à son plan.

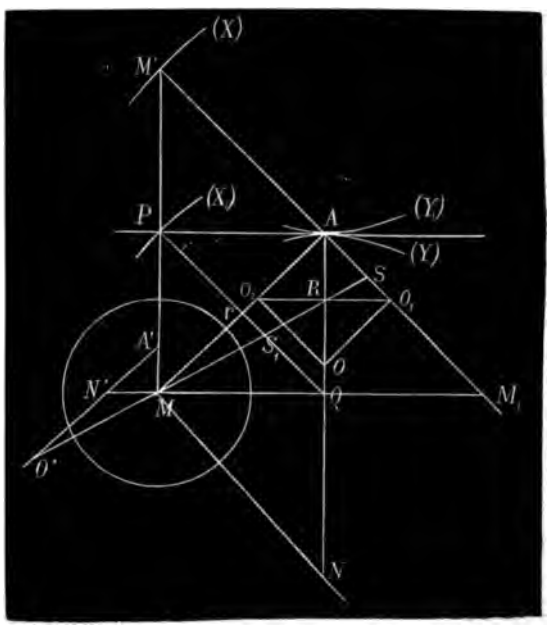
La propriété démontrée ci-dessus ne constitue pas la seule analogie qui existe entre les coniques planes et les coniques microsphériques : les théorèmes relatifs aux angles et en général, tous les théorèmes qui n'impliquent pas la considération de longueurs ou de surfaces subsistent pour les figures microsphériques (Voir l'*Annuaire scientifique du cercle des normaliens*, 1888, p. 92).

SUR LA COURBURE DE LA PODAIRE ET DE LA POLAIRE RÉCIPROQUE D'UNE COURBE DONNÉE;

par M. Ch. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. Le lieu des projections P d'un point M sur toutes les tangentes à une courbe (Y), est une courbe (X_1) qu'on appelle la *podaire* du point M par rapport à la courbe (Y). Soit A un point de la courbe (Y), (Y_1) la courbe symétrique de (Y) par rapport à la tangente au point A; si la

courbe (Y_1) roule sur (Y), le point M' symétrique de M par rapport à la tangente au point A, lié invariablement à (Y_1), décrit une certaine courbe (X). Mais, dans ce mouvement, le point M' reste constamment le symétrique de M, par rapport à la tangente au point instantané de contact; donc les deux courbes (X) et (X_1) sont homothétiques.



2. Soient R et ρ les rayons de courbure AO et M'S des courbes (Y) et (X); φ l'angle MAO, n la distance M'A; on sait que

$$\rho = \frac{2n^2}{2n - R\cos\varphi} \text{ (*)}. \qquad (1)$$

Les deux courbes (X) et (X_1) étant homothétiques, le rayon de courbure R_1 de (X_1) sera donné par la formule

$$R_1 = \frac{n^2}{2n - R\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Soient Q et N les points d'intersection de AO, respectivement avec la

(*) MANNHEIM, *Géométrie descriptive* (2me édition), p. 177. Voir aussi notre note *Sur les centres de courbure*, BB. (3), XIX, p. 145.

normale à la courbe (X_1) et la perpendiculaire élevée au point M sur AM. Les droites AN et PQ seront les normales polaires N et N_1 des deux courbes (Y) et (X_1). Or

$$PQ = n, \quad AN\cos\varphi = n;$$

par conséquent, la formule (2) peut se mettre sous la forme

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{R}{N} = 2. \tag{3}$$

Si l'on prend la podaire de (X_1) ou la deuxième de (Y), et qu'on appelle N_2 et R_2 la normale polaire et le rayon de courbure de cette courbe, on a

$$\frac{N_2}{R_2} + \frac{R_1}{N_1} = 2;$$

ou, en remplaçant $\frac{R_1}{N_1}$ dans (3) par sa valeur tirée de l'égalité précédente,

$$2\left(\frac{N_2}{R_2} + \frac{R}{N}\right) - \frac{N_2}{R_2}\cdot\frac{R}{N} = 3.$$

Pour la $p^{ième}$ podaire de (Y) on a par analogie

$$p\left(\frac{N_p}{R_p} + \frac{R}{N}\right) - (p-1)\frac{N_p}{R_p}\cdot\frac{R}{N} = p+1. \tag{4}$$

Voici une application assez remarquable de cette formule : ***Si on prend la $p^{ième}$ antipodaire d'une droite, son rayon de courbure est lié à la normale polaire par l'égalité***

$$R = \frac{p+1}{p}N.$$

Cette relation est la généralisation de cette propriété connue de la parabole,

$$R = 2N.$$

3. Soit M_1 le symétrique de M′ par rapport au point A, O_1 la projection de O sur AM_1 ; l'égalité (1) donne

$$\frac{2}{AO_1} = \frac{1}{AM_1} + \frac{1}{AS}, \quad \text{ou} \quad (AO_1M_1S) = -1.$$

Si l'on coupe le faisceau M (AO_1M_1S) par une perpendiculaire abaissée de O_1 sur AO, le point de rencontre R de cette droite avec MS sera le milieu des deux points d'intersection O_1 et O_2 de cette même droite avec

MO_1 et MA ; donc R est situé sur AO. Donc, si on projette O en O_2 sur AM et O_2 en R sur AO, la droite MR passe par le centre de courbure S, et aussi par le centre de courbure de la podaire.

4. La polaire réciproque d'une courbe (Y) par rapport à un cercle de centre M est l'inverse de la podaire du point M par rapport à (Y). Soit A' le pôle de la tangente au point A à la courbe (Y); la tangente en ce point A' à la polaire réciproque sera la polaire du point A ; donc la normale en A' sera parallèle à AM. Les centres de courbure de deux courbes inverses étant en ligne droite avec le pôle d'inversion, la droite MR coupe la normale en A' au centre de courbure O' de la polaire réciproque. De la similitude des triangles A'O'M, ARM, on tire

$$\frac{A'O'}{AM} = \frac{A'M}{AR} \quad \text{ou} \quad A'O' = A'M \cdot \frac{AM}{AR}.$$

Soit a le rayon du cercle M ; on a

$$A'M \cdot MP = a^2;$$

puis

$$A'O = a^2 \frac{AM}{MP} \frac{1}{AR} = \frac{a^2}{AR \cos\varphi} = \frac{a^2}{AO \cos^3\varphi}.$$

Donc si l'on appelle R' le rayon de courbure de la polaire réciproque, on a la formule :

$$RR' \cos^3\varphi = a^2 (*). \tag{5}$$

La même relation existe entre les normales polaires quand M est le pôle des coordonnées. On a en effet,

$$N = AN = \frac{AM}{\cos\varphi} = \frac{MP}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2}{A'M \cos^2\varphi} = \frac{a^2}{A'N' \cos^3\varphi} = \frac{a^2}{N' \cos^3\varphi};$$

donc

$$NN' \cos^3\varphi = a^2. \tag{6}$$

Les relations (5) et (6) donnent

$$RR' = NN' (**). \tag{7}$$

(*) *Liouville*, 1866, p. 193 (MANNHEIM).

(**) *Mathesis*, t. VIII, p. 7 (D'OCAGNE). Le présent travail a été remis à la rédaction avant la publication de la formule de M. d'Ocagne (P. M.).

En combinant les égalités (3) et (7) on obtient :

$$\frac{N_1}{R_1}+\frac{N'}{R'}=2(*), \tag{8}$$

relation entre les normales polaires et les rayons de courbure de deux courbes inverses.

SUR UNE CORRESPONDANCE DE DROITES ET DE POINTS;

par M. Aug. Poulain, à Angers.

1. Salmon a fait remarquer(**) qu'en coordonnées cartésiennes, la droite représentée par $\Delta \equiv ax+by+1=0$ est la polaire du point $x=a, y=b$ par rapport à l'ellipse imaginaire qui a pour équation $x^2+y^2+1=0$. Cette correspondance permet de donner, de la manière la plus simple, un corrélatif à tout théorème de position.

Il est utile d'en faire autant dans la géométrie du triangle. On semble ne s'y être préoccupé que de la correspondance entre une droite et le point harmoniquement associé ; ce qui est moins simple.

Soit un point M défini par les équations $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$; ses coordonnées trilatères générales (ce qui comprend les coordonnées barycentriques, normales, etc.) sont donc l, m, n. La droite qui a pour équation $\Delta \equiv lx+my+nz=0$, est la polaire de M par rapport à l'ellipse imaginaire *fixe* représentée par $x^2+y^2+z^2=0$. Cette conique est conjuguée à ABC ; en coordonnées barycentriques ou normales, son centre est G ou K.

2. Signalons quelques conséquences de la propriété fondamentale :

1° Si M parcourt une droite Δ', sa polaire Δ passe par un point fixe, qui est le pôle de Δ'.

2° Si M décrit une conique, sa polaire Δ a pour enveloppe une autre conique(***).

3° Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est le

---

(*) N. A. M., 1866, (2), V, p. 169 (Nicolaïdès) et aussi *Mathesis*, 1884, IV, p. 77 (d'Ocagne).

(**) Salmon-Chemin, *Sections coniques*, n° 321.

(***) Voir dans Salmon la méthode pour trouver l'équation de cette enveloppe (n° 321).

même que celui de leurs polaires. Cet énoncé donne sans calcul le rapport anharmonique des droites ayant pour équations $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta + K\Delta_1 = 0$, $\Delta + K'\Delta_1 = 0$; on sait qu'il égale $K : K'$.

4° Un triangle quelconque est homologique avec le triangle qui a pour côtés les polaires des sommets du premier triangle.

5° Si deux triangles MM'M'', PP'P'' sont homologiques, il en est de même de ceux qui sont formés par les pôles de leurs côtés. Le centre Q d'homologie d'un des systèmes a pour polaire l'axe d'homologie R de l'autre système. En effet la droite MP passant par Q, les polaires de M et de P se coupent sur R. On peut en dire autant des trois couples de points homologues. Donc les triangles du second système ont R pour axe d'homologie.

6° Comme les propriétés précédentes (y compris la propriété fondamentale) sont projectives, elles subsistent si l'on transforme homographiquement M, Δ (et la conique fondamentale).

7° Si on transforme homographiquement M, *sans modifier* Δ, les corollaires restent vrais, quoique la propriété fondamentale ne subsiste plus en général. En un mot, Δ ne reste pas la polaire de M' par rapport à une conique fixe. Car soit $f(x, y, z) = 0$ la conique qu'il faudrait prendre. Pour identifier Δ avec la polaire de M', il faudrait qu'on eût

$$\frac{l}{f'_{l'}} = \frac{m}{f'_{m'}} = \frac{n}{f'_{n'}}.$$

Or cette transformation est homographique, mais n'est pas générale, car elle ne contient que cinq coefficients arbitraires au lieu de huit.

Toutefois les corollaires 1, 2, 3, 5 subsistent. En effet, si, par exemple, le transformé M' de M décrit une conique, nous avons vu (6°) que la transformée Δ' de Δ a pour enveloppe une conique. Donc il en est de même de Δ.

On verrait de même qu'en conservant M, on peut, pour les corollaires précédents, substituer à Δ sa transformée homographique.

En coordonnées cartésiennes rectangulaires, on a de plus une propriété métrique. La conique fondamentale se réduisant alors au cercle $x^2 + y^2 + 1 = 0$, l'angle de deux droites Δ, Δ' est égal ou supplémentaire à l'angle sous lequel on voit, de l'origine, les deux pôles.

3. *Application de ce principe de dualité.* Si l'on demande de prouver que trois droites sont concourantes, on ramène la question à prouver que trois points M, M', M'' sont en ligne droite. Or, pour cela, on a un

théorème de M. Brocard : la condition nécessaire et suffisante(*) est qu'en coordonnées trilatères absolues, deux des différences $x - x'$, $x' - x''$, $x'' - x$ aient un rapport symétrique relativement à a, b, c (J. M. E., 1883, p. 251).

4. Étant donnés deux points M', M'', on rencontre souvent le point dont les coordonnées trilatères sont $y'z'' - z'y''$, $z'x'' - x'z''$, $x'y'' - y'x''$. Par exemple, en coordonnées barycentriques, et pour les isobariques du point de Lemoine, c'est $b^2c^2 - a^4$, ...

On voit que ce point est le pôle de M'M''. Dès lors, c'est aussi l'intersection des polaires de M' et M''.

5. Si, par B et C, on mène les transversales angulaires de M' et M'' et qu'on joigne diagonalement les pieds de ces droites sur AC et BC, on a un point M_a dont les coordonnées trilatères sont

$$x : y : z = \frac{x''^2y'z' - x'^2y''z''}{x'x''y'y'z'z''} : \left(\frac{1}{x'z''} - \frac{1}{x''z'}\right) : \left(\frac{1}{x'y''} - \frac{1}{y'x''}\right),$$

et qui, d'après le théorème de Pascal, est situé sur M'M''. On voit que le rapport $y : z$ changé de signe est formé avec deux coordonnées du pôle de la droite qui joint les inverses (pris dans ce système) de M' et M''.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

1. Soient AA', BB', CC' les hauteurs d'un triangle ABC, H leur point de concours, M un point quelconque de la droite B'C'. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de B sur CM et de C sur BM rencontrent AH en deux points B_1, C_1 symétriques par rapport au milieu de AH.

(D'OCAGNE.)

En effet, lorsque M parcourt B'C', les droites BM et CM engendrent deux faisceaux projectifs; il en est donc de même de BB_1 et CC_1, et les points B_1, C_1 se correspondent dans deux ponctuelles projectives. Ces ponctuelles sont même en involution; car, lorsqu'on place M en B' ou C', on voit que A et H forment un couple permutable. Le point à l'infini sur AH est un point double de l'involution, qui correspond au point M situé

(*) Il est sous-entendu que les trois coordonnées de chacun des trois points sont de la forme $f(a, b, c), f(b, c, a), f(c, b, a)$. (J. N.).

à l'intersection de B'C' avec BC ; le second point double est le milieu de la distance de deux points conjugués quelconques de l'involution. (J. N.)

2. On donne deux points A, B et une droite *d*. Un point M se meut sur *d*. La conjuguée harmonique de *d* par rapport à l'angle AMB passe par un point fixe. (MEURICE.)

3. Par les sommets B, C d'un triangle ABC on fait passer une circonférence quelconque, coupant AB en C', AC en B'. Trouver 1° le lieu du point de rencontre E des droites BB', CC' ; 2° l'enveloppe de la droite joignant E au point de rencontre F de BC avec la droite B'C'.

1° Les angles BC'C, BB'C étant égaux, la différence des angles B'BC, C'CB est constante ; donc E décrit une hyperbole équilatère circonscrite à ABC, ayant son centre au milieu de BC et ses asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle BAC. 2° La droite B'C' a une direction fixe. Les droites FA, FE, FB', FB forment un faisceau harmonique et, par suite, déterminent sur la parallèle menée par A à B'C' deux segments égaux ; il résulte de là que EF passe par un point fixe de cette parallèle. (MEURICE.)

4. Soient B, C deux points fixes et A un point mobile d'une circonférence O. La perpendiculaire au milieu *m* de BC coupe la circonférence aux points D, D', et la droite BA au point E. Par E, on mène une droite EX parallèle à BC ; appelons M, N, P, Q les points où EX rencontre le côté AC, la bissectrice AD, la médiane A*m* et la hauteur AH du triangle ABC. Trouver les lieux de ces points. (MEURICE.)

1° M est à l'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs ayant leurs centres en C et au point à l'infini sur BC. Soit I ce dernier point ; la tangente en I (asymptote) est la position de EX qui correspond à CA confondu avec CB, ou à E situé à l'intersection de *m*O avec la tangente en B au cercle O. La direction de la seconde asymptote s'obtient en supposant EX à l'infini ou BA parallèle à *m*O ; donc une asymptote est parallèle à CO. La courbe (M) rencontre la circonférence en D, D' et la touche en C.

2° N est à l'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs ayant leurs sommets en D et I ; en faisant coïncider A avec D, on trouve que la droite qui joint les sommets des deux faisceaux est sa propre homologue. Donc le lieu de N est une droite. Ce résultat peut aussi se déduire du quadrilatère inscriptible D'ANE (les angles D'EM, D'AN sont droits) : les angles ED'N, EAN étant égaux, N est sur la droite D'C.

3° P est l'intersection de deux rayons homologues EX, mA de deux faisceaux ayant pour sommets I et m. Ces faisceaux ne sont pas projectifs; car sur une droite menée par m et rencontrant la circonférence O aux points A, A', nous trouvons deux points du lieu (P), correspondant aux triangles ABC, A'BC. Le lieu proprement dit est cependant une conique; car lorsqu'on fait coïncider A avec C, on peut dire que les rayons EX, mA coïncident et que la droite entière BC se sépare du lieu; ou mieux, que le point P a pour limite le milieu de mC, lorsque mA tend vers mC. Le lieu est une hyperbole dont une asymptote est parallèle à BC et dont l'autre est parallèle à la droite joignant m au point diamétralement opposé à C. Si BC est un diamètre du cercle O, le lieu de P est une parabole ayant pour foyer O et pour directrice la tangente en C au cercle O.

4° Le point Q est à l'intersection des rayons homologues EX, AH de deux faisceaux dont les centres sont les points I, J situés à l'infini sur BC et mO. Sur une perpendiculaire à BC qui rencontre la circonférence O aux points A, A', nous trouvons trois points Q, savoir : deux qui correspondent aux triangles ABC, A'BC, et le point J qui correspond au triangle ayant pour sommets B, C et le point diamétralement opposé à C. Le lieu de Q est donc une cubique. Si BC est un diamètre du cercle O, Q décrit une *courbe d'Agnesi*.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. ***Soustraction des nombres fractionnaires, lorsque la fraction à soustraire est plus grande que celle dont il faut la soustraire.*** Soit à soustraire $5\frac{25}{27}$ de $9\frac{8}{27}$. Au lieu de dire : 27 et 8, 35; 23 de 35, 12, il est plus simple de dire : 23 de 27, 4, et 8, 12; ce qui revient à remplacer $\frac{27}{27}+\frac{8}{27}-\frac{25}{27}$ par $\frac{27}{27}-\frac{25}{27}+\frac{8}{27}$. (E. Gelin.)

2. ***Courbes enveloppes et courbes tangentes.*** Il est utile de distinguer, en géométrie infinitésimale, les lignes ***enveloppes*** et les lignes ***tangentes*** à un système $F(x, y, c) = 0$ de courbes données. Les enveloppes ne sont pas toujours des lignes tangentes et les lignes tangentes ne sont pas toujours des ***enveloppes***. Ainsi, la droite $x = 0$ est tangente aux courbes $y = c + (\log x)^{-1}$, qui n'ont pas d'enveloppe, et est une enveloppe des courbes $(y - c)^3 = x^5$, sans leur être tangente. Ces dernières courbes n'ont d'ailleurs pas de ligne tangente commune. (P. M.)

3. *Points caractéristiques.* L'énoncé de plusieurs propriétés des enveloppes d'un système $F(x, y, c) = 0$ de courbes données, se simplifie si l'on appelle *point caractéristique* d'une enveloppée $F(x, y, c) = 0$, la limite du point d'intersection de cette courbe avec l'enveloppée voisine $F(x, y, c') = 0$, quand c' tend indéfiniment vers c. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 418.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 47.)

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_i$, *des droites passant par un point fixe* A, *et supposons ce faisceau de droites lié à un plan qui se déplace sur lui-même. Soient* O *le centre instantané de rotation,* (C) *le centre des cercles. A la droite* a_i *correspond une conique* (a_i) *lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de* a_i. *Soit* M *le point d'intersection de* (a_i) *avec une droite passant par le centre instantané* O *et faisant avec* a_i, *un angle constant* φ. *Démontrer que le lieu géométrique du point* M *est une strophoïde qui a son point double en* O, *et dont les cercles osculateurs en* O *sont* 1° *la circonférence des centres* (C); 2° *le segment capable de l'angle* φ *décrit sur* OA. (E. Dewulf.)

Solution par M. Cl. Servais. Il suffit de faire voir que le lieu des centres de courbure des trajectoires décrites par les points du segment (OA) capable de l'angle φ, et décrit sur OA, est une cubique nodale circulaire, ayant pour cercles osculateurs au point double O, la circonférence des centres (C) et le segment (OA). Cette cubique n'est d'ailleurs une strophoïde, que dans le cas où le segment (OA) coupe orthogonalement le cercle (C).

Soit M_1 un point du segment (OA), M le centre de courbure correspondant, μ le point de rencontre de la droite OM avec le cercle (C). On a :

$$\frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM} = \frac{1}{O\mu};$$

donc si on décrit un cercle (C_1), ayant pour rayon le diamètre du cercle (C) et tangent à ce cercle, le point M_1' symétrique de M_1 par rapport à O, et le centre de courbure M sont conjugués par rapport à ce cercle (C_1). Par conséquent : *Pour une position de la figure mobile, le lieu des*

centres de courbure des trajectoires décrites par les points d'une courbe (M), *est la transformée birationnelle quadratique de troisième espèce* (*quasi inversion linéaire*) *de la courbe* (M_1) *symétrique de* (M) *par rapport au centre instantané.*

Si la courbe (M) est un cercle (OA) passant par O, le lieu des centres de courbure sera une cubique, ayant pour point double le point O ; les tangentes à la courbe en ce point seront les tangentes aux cercles (C) et (OA). Les points d'intersection du cercle (C_1) et du symétrique $(OA)_1$, du cercle (OA) par rapport à O, étant situés sur la cubique, cette dernière sera une courbe circulaire.

Le cercle (C), qui, dans la transformation, correspond aux points à l'infini du plan, ne rencontrera la cubique qu'au point double O et aux points cycliques, quatre points d'intersection seront donc confondus en O et le cercle (C) sera osculateur à la cubique en ce point.

Les deux points M_1 et M ne pouvant jamais coïncider, le cercle (OA) ne peut rencontrer la cubique qu'au point double O et aux points cycliques; C est donc le second cercle osculateur à la cubique au point double.

Considérons le cercle (C_2) symétrique du cercle (C) par rapport au point O ; ce cercle sera le lieu des points d'inflexion, pour une position de la figure mobile. Soit L le point de rencontre des deux cercles (C_2) et (OA) ; la droite OL sera parallèle à l'asymptote de la cubique, car le centre de courbure de la trajectoire décrite par L est à l'infini. On a donc cette propriété : ***En un point double d'une cubique nodale circulaire, la corde d'intersection d'un cercle osculateur avec le symétrique du second par rapport au point double, est parallèle à l'asymptote.***

Soit K le point commun aux cercles (C_1) et $(OA)_1$; ce point étant son conjugué par rapport au cercle (C_1), sera sur la cubique. Donc, ***si en un point double d'une cubique nodale circulaire, on décrit un cercle tangent ayant pour rayon le diamètre de l'un des cercles osculateurs, ce cercle rencontre le symétrique du second cercle osculateur par rapport au point double, en un point appartenant à la cubique.***

×Question 532.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 192 et (I) 1, p. 30.)

Soient $u, v, w, \ldots$ les facteurs PREMIERS *de n, supérieurs à 2. Le nombre des* NOMRRES TRIANGULAIRES, *premiers avec n, inférieurs à $2n(n+1)$ est*

$$n\left(1-\frac{2}{u}\right)\left(1-\frac{2}{v}\right)\left(1-\frac{2}{w}\right)\cdots$$

ou bien le double de ce nombre suivant que n est PAIR *ou* IMPAIR.

(E. CESÁRO.)

Solution par M. EMMERICH. Posons, pour abréger, $C_{p,2} = T_p$; $T_2, T_3, \ldots$ sont les nombres triangulaires. Comme

$$T_{2n+1} < 2n(n+1) < T_{2n+2},$$

il faut chercher combien des nombres

$$T_2, T_3, T_4, \ldots, T_{2n+1} \tag{1}$$

sont premiers avec n. A cet effet, nous éliminons de la suite (1) les termes divisibles par l'un des nombres $2, u, v, \ldots$

Soit d'abord n impair. Pour que $T_p = \frac{1}{2}p(p-1)$ soit divisible par le nombre premier $u > 2$, l'un des nombres $p, p-1$ doit être multiple de u. Donc les termes de la suite (1) qui admettent le facteur u sont

$$T_u, T_{u+1}, T_{2u}, T_{2u+1}, \ldots, T_{2n,2n+1}; \tag{2}$$

ils sont au nombre de $2.\frac{2n}{u} = \frac{4n}{u}$. Le nombre des termes de la suite (1) qui sont premiers avec u est donc $2n - \frac{4n}{u} = 2n\left(1-\frac{2}{u}\right)$.

On verrait de la même manière que les termes de la suite (1) qui sont divisibles par v sont

$$T_v, \quad T_{v+1}, \quad T_{2v}, \quad T_{2v+1}, \quad \ldots, \quad T_{2n,2n+1}; \tag{3}$$

ils sont au nombre de $\frac{4n}{v}$.

Les suites (2) et (3) ont des termes communs, qui correspondent aux solutions des équations

$$ux = vy, \quad ux+1 = vy+1, \quad ux = vy+1, \quad ux+1 = vy.$$

Or, parmi les nombres de la forme ux, inférieurs à $2n$, il y en a

$\frac{2n}{uv}$ divisibles par y; de même, parmi ceux de la forme $ux - 1$, ou de la forme $ux + 1$, il y en a $\frac{2n}{uv}$ divisibles par y. Donc il y a $\frac{8n}{uv}$ termes appartenant à la fois aux deux suites (2) et (3).

Il résulte de là que parmi les nombres (1), il y en a

$$2n - \frac{4n}{u} - \frac{4n}{v} + \frac{8n}{uv} = 2n\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)$$

qui sont premiers avec u et v.

En continuant de la sorte, on arrive au théorème proposé, pour le cas de n impair.

Considérons maintenant le cas de n pair. Le nombre T_p est divisible par 2, lorsque p ou $p - 1$ est divisible par 4; donc les raisonnements à faire pour tenir compte des facteurs 2 de n sont les mêmes que pour les facteurs u, v, ... avec cette différence que le nombre 4 se substitue au facteur premier 2. Par suite, la réponse est maintenant

$$2n\left(1 - \frac{2}{4}\right)\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)\cdots = n\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)\cdots.$$

Question 590.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 240.)

Construire une conique osculatrice à un cercle donné en un point donné A, ***connaissant la corde idéale commune à la conique et au cercle infiniment petit*** A. (E. Dewulf.)

Solution par M. Servais. La corde commune est parallèle à la corde de courbure au point A. Donc, si par ce point, on mène une parallèle à la corde donnée, elle coupera le cercle donné en un point D appartenant à la conique demandée. Soit H le point de rencontre de la tangente au point A avec la corde commune, O le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur cette corde. La polaire du point H par rapport à la conique, coupera la corde en un point B tel que $HB \cdot HO = \overline{HA}^2$. Ce point B sera donc à l'intersection de la corde donnée avec un cercle passant par le point O et tangent au point A au cercle donné. Joignons HD, soit d le point de rencontre de AB et HD; le point D′ tel que

(DD'Hd) = — 1 appartiendra à la conique. Pour obtenir autant de points de la conique qu'on le voudra, il suffit de chercher la transformée quadratique de troisième espèce de la conique, le pôle de la transformation étant le point A, et la conique fondamentale, le cercle tangent intérieurement au point A au cercle donné et ayant un rayon double. Cette transformée est une droite passant par le point D'' correspondant du point D', et parallèle à AD(*).

Solution par M. A. Demoulin. Prenons pour axes la tangente et la normale en A au cercle. L'équation de la conique est de la forme

$$x^2 + (Ay + Bx + C)\,y = 0. \qquad (1)$$

Pour tout point de la conique tel que

$$Ay + Bx + C = y, \qquad (2)$$

on a la relation

$$x^2 + y^2 = 0.$$

L'équation (2) est donc celle de la corde considérée dans l'énoncé. Cette droite est parallèle à la corde de courbure en A. Il suit d'ailleurs, de l'équation (1), que

$$Ay + Bx + C = 0$$

est l'équation de la tangente à la conique au point normal N. Dès lors, cette droite et la droite (2) se coupent en un point I de l'axe des x. De là résulte cette construction de la conique. La droite (2) étant donnée, menons parallèlement à cette droite, par le point A, une sécante qui coupe le cercle donné au point de courbure R. Joignons IR qui rencontre AN en n et déterminons, sur cette droite, le point R' conjugué harmonique de R par rapport aux points I et n. Il suffira, à cet effet, de faire l'angle R'An = l'angle nAR. Il s'agit donc maintenant de construire une conique ayant trois points confondus en A et passant par les points R et R'. Or ce dernier problème a été résolu par M. Cl. Servais dans le n° de janvier 1888 de ***Mathesis***.

(*) Voir *Applications de la transformation quadratique*. ***Mathesis***, t. VIII, p. 28.

Question 675.

(Voir *Mathesis*, t. X, pp. 48 et 258.)

Le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D *d'une conique est égal à la racine carrée du rapport anharmonique du faisceau* P(ABCD), *qui a pour centre le pôle* P *de la corde* AB. (G. Tarry.)

Solution par M. Liénard. Soient C, D deux points d'une circonférence O, A et B les points cycliques, θ l'angle COD, DT la tangente en D. On a

$$O\,(C, D, A, B) = e^{2i\theta}, \quad D\,(C, T, A, B) = e^{i\theta};$$

d'où, par projection, le théorème énoncé.

Question 676(*).

(Voir *Mathesis*, (1) t. X, p. 48 et (2) t. I, p. 32.)

L'équation

$$a\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$+b\left(1-x+\frac{x^3}{1.2}-\frac{x^5}{1.2.3}+\cdots\pm\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)+c=0,$$

ne peut avoir plus de deux racines réelles. (Sylvester.)

Énoncée en ces termes, la question me paraît inexacte. Soient, en effet,

$$m=3, \quad a=6, \quad b=30, \quad c=-27;$$

on a

$$f(x)\equiv 6\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+30\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-27=0.$$

On trouve aisément

$$f(0)=+9, \quad f(1)=-1, \quad f(2)=+1, \quad f(+\infty)=-\infty,$$

de sorte que l'équation $f(x)=0$ a ses trois racines réelles dans les intervalles (0, 1), (1, 2), (2, $+\infty$).

Peut-être y a-t-il sur les valeurs de a, b, c, m des restrictions qu'on aura omises dans la transcription de l'énoncé? (A. Laisant.)

(*) Question 7668 de l'*Educational Times*, reproduite dans les « *Unsolved Questions*, by Professor Sylvester. » L'énoncé a été copié exactement.

Question 678.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 72.)

Etudier la surface, lieu des circonférences de contact des cônes circonscrits à des sphères égales, les centres de ces sphères étant sur une droite fixe et les cônes, ayant même sommet S. (H. Brocard.)

Solution par MM. Denys *et* Lalisse. Prenons des axes rectangulaires, l'axe des z étant la droite fixe et l'axe des x passant par S.

L'équation de l'une des sphères est

$$x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 = R^2, \qquad (1)$$

et le plan polaire du point S $(d, 0, 0)$ est représenté par

$$dx - \alpha(z - \alpha) = R^2. \qquad (2)$$

L'équation de la surface proposée résulte de l'élimination de α entre les égalités (1) et (2); on trouve

$$(x^2 + y^2 - dx)^2 + z^2(x^2 + y^2 - R^2) = 0.$$

La surface est donc du quatrième ordre. Pour que z soit réel, on doit avoir $x^2 + y^2 - R^2 < 0$; donc la surface est complétement intérieure au cylindre K qui a pour axe OZ et pour rayon R, résultat qui s'explique aisément par la circonstance que ce cylindre est l'enveloppe des sphères considérées. Lorsque $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, on a $z = \infty$; donc le cylindre est asymptotique à la surface proposée.

La section par le plan XY est la circonférence représentée par $x^2 + y^2 - dx = 0$ et décrite sur OS comme diamètre; cette courbe appartient entièrement à la surface si l'on a $OS \leqq R$. Mais si OS surpasse R, la partie extérieure à la base du cylindre K est un *arc isolé;* les verticales menées par les points où elle sort de cette base appartiennent entièrement à la surface (3); ce sont les génératrices de contact du cylindre K avec les plans tangents menés par S.

La section par le plan YZ a pour équation

$$y^4 + z^2(y^2 - R^2) = 0, \quad \text{ou} \quad \rho = R \operatorname{tg} \omega;$$

c'est une courbe assez connue (Voir J.M.S., 1887, p. 233; 1890, p. 273).

Question 692.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 216.)

Par un point P *du plan d'un triangle* ABC *passent deux hyperboles équilatères, l'une circonscrite, l'autre conjuguée au triangle. Déterminer en coordonnées trilinéaires les équations de ces hyperboles et l'équation du cercle qui passe par les points d'intersection de ces courbes, autres que le point* P. (E. Lucas.)

Solution par M. Kluyver (Breda). Soient α, β, γ les coordonnées normales de P par rapport au triangle de référence ABC.

L'hyperbole circonscrite, passant par l'orthocentre (séc A, séc B, séc C) a pour équation

$$H_1 \equiv \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

L'hyperbole conjuguée passant par le centre du cercle inscrit, son équation est

$$H_2 \equiv \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient L, M, N les points de rencontre de ces courbes autres que P; le dernier point est l'orthocentre du triangle LMN. L'équation du cercle des neuf points de LMN s'obtient en cherchant le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par L, M, N, P. Ces courbes étant représentées par l'équation

$$\lambda H_1 + H_2 = 0,$$

on trouve pour l'équation du cercle

$$K \equiv \begin{vmatrix} x(\beta^2 - \gamma^2) & y(\gamma^2 - \alpha^2) & z(\alpha^2 - \beta^2) \\ \beta\beta' z + \gamma\gamma' y & \gamma\gamma' x + \alpha\alpha' z & \alpha\alpha' y + \beta\beta' x \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = 0,$$

après avoir posé

$$\alpha' = \beta\cos B - \gamma\cos C, \quad \beta' = \gamma\cos C - \alpha\cos A, \quad \gamma' = \alpha\cos A - \beta\cos B.$$

Or, le cercle LMN et le cercle K sont deux figures homothétiques, le centre d'homothétie étant P et le rapport de similitude étant égal à 2.

Entre les coordonnées absolues (X, Y, Z), (x, y, z) de deux points homologues et celles de P, on a donc les relations

$$x = \frac{X + \alpha}{2}, \quad y = \frac{Y + \beta}{2}, \quad z = \frac{Z + \gamma}{2}.$$

Pour l'homogénéité, nous écrivons

$$\frac{x}{X\delta + \alpha D} = \frac{y}{Y\delta + \beta D} = \frac{z}{Z\delta + \gamma D},$$

où

$$D \equiv X \sin A + Y \sin B + Z \sin C, \quad \delta \equiv \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C.$$

Remplaçons dans l'équation $K = 0$ les coordonnées x, y, z par les quantités $X\delta + \alpha D$, ... qui leur sont proportionnelles, etc.

QUESTIONS D'EXAMEN.

475. Résoudre

$$1 + \frac{2x}{a + 4a} + \frac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \frac{6a}{2x - a}.$$

Le dénominateur commun est $2x^2 + 7ax - 4a^2$. On trouve

$$6x^2 - ax - a^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{a}{3}, \quad x = \frac{a}{2}.$$

La racine $x = \frac{a}{2}$ qui annule le dénominateur commun a besoin d'être vérifiée. — A cet effet, on écrit

$$1 + \frac{2x}{x + 4a} = \frac{1}{2x - a}\left(6a - \frac{27a^2}{x + 4a}\right) = \frac{3a(2x - a)}{(2x - a)(x + 4a)}.$$

En divisant les deux termes de la fraction du second membre par $2x - a$, on peut dire que $x = \frac{1}{2}a$ est une solution étrangère. (*Journal de Vuibert.*)

476. On a

$$(a - b)^2 (b - c)^2 + (b - c)^2 (c - a)^2 + (c - a)^2 (a - b)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)^2.$$

477. Étant donnée l'équation

$$x^2 - 2mx - (1 - m^2) = 0,$$

entre quelles limites doit être compris m, pour que les deux racines soient comprises entre -2 et $+4$.

(*Baccalauréat de l'enseignement secondaire spécial*, 1889.)

L'équation peut être écrite ainsi : $(x-m)^2-1=0$. Les racines étant $m+1$, $m-1$, on pose $m+1<4$, $m-1>-2$; d'où $-1<m<3$.

478. Discuter les racines de l'équation

$$(\lambda^2+\lambda-2)x^2+2(\lambda+1)x-(\lambda+1)=0.$$

Résumé de la discussion :

1° $\lambda<-1-\sqrt{2}$, x' et x'' sont imaginaires ;
2° $-1-\sqrt{2}<\lambda<-2$, les racines sont positives ;
3° $-2<\lambda<-1$, x' et x'' ont des signes contraires ;
4° $-1<\lambda<-1+\sqrt{2}$, x' et x'' sont imaginaires ;
5° $-1+\sqrt{2}<\lambda<1$, les racines sont positives ;
6° $\lambda>1$, x' et x'' ont des signes contraires (*Journal de Vuibert.*)

479. Deux cercles égaux touchent une droite AB du même côté. Trouver sur cette droite un point M tel que les secondes tangentes menées de ce point aux deux cercles fassent l'angle donné α.

(*Baccalauréat*, Nancy, 1889.)

Soient 2β, 2γ les angles sous lesquels on voit de M les deux cercles x et $d-x$ les segments dans lesquels M divise la tangente commune. On a

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{R}{x},\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{R}{d-x},\quad \beta+\gamma+\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\text{ou}\quad \cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

480. Le nombre 563 est le seul nombre de trois chiffres multiple de 70 plus 3, dont la somme des chiffres soit 14.

481. L'équation

$$\sqrt{a^2-x^2}+x\sqrt{a^2-1}=a^2(1-x^2)$$

a pour racines $x=-1$ et une seulement des valeurs

$$x=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2}(-1\pm\sqrt{a^2+1}).$$

482. Construire un triangle connaissant un côté, la hauteur correspondante et le produit des deux autres côtés.

483. Une droite quelconque étant donnée par ses deux projections, mener, par sa trace horizontale et dans le plan horizontal, une autre droite qui fasse avec la première un angle donné.

484. Un triangle ABC étant inscrit à un cercle et D étant le milieu de l'arc BAC, le produit des côtés AB et AC est égal à la différence des carrés des droites DB et DA. (*Journal de Lebon.*)

485. Démontrer qu'un trièdre SABC rectangle selon l'arête SA, est coupé selon un triangle rectangle par tout plan perpendiculaire à l'une des deux autres arêtes.

486. Les nombres 132, 264, 396 sont les seuls, parmi ceux qui ont trois chiffres, qui soient égaux à la somme des six nombres de deux chiffres qu'on peut former en combinant deux des chiffres du nombre inconnu de toutes les manières possibles. (*Journal de Vuibert.*)

Si le nombre est *cdu*, on doit avoir

$$100c + 10d + u = 22(c + d + u), \quad c < 10, \; d < 10, \; u < 10.$$

487. Le plus petit nombre entier égal au quadruple du produit de ses chiffres est 384. (*Journal de Vuibert.*)

488. Le seul nombre de trois chiffres dont le double représente le nombre des chiffres de tous les nombres entiers non supérieurs au nombre cherché est 108. (*Journal de Vuibert.*)

489. Trouver les triangles rectangles, dont les côtés sont des nombres entiers, où le nombre représentant le périmètre est égal au nombre qui exprime la surface, ou le double de la surface.

(*Journal de Vuibert.*)

R. 1° 5, 12, 13; 6, 8, 10. 2° 3, 4, 5.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***712.** Les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés du triangle ABC en A′, B′, C′; les côtés du triangle A′B′C′ en A″, B″, C″; les côtés du triangle A″B″C″ en A‴, B‴, C‴ et ainsi de suite. Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques de M par rapport au triangle ABC. On propose : 1° de trouver les coordonnées des sommets des triangles A′B′C′, A″B″C″, ...; 2° de démontrer que M a les mêmes coordonnées barycentriques par rapport à chacun de ces triangles; 3° de démontrer que les aires de ces triangles forment une progression géométrique.

Examiner quelques cas particuliers. (J. Neuberg.)

×**713.** Soient H l'orthocentre du triangle ABC, M un point quelconque de son plan, et H_a, H_b, H_c les orthocentres des triangles AMH, BMH, CMH.

Démontrer que les circonférences circonscrites aux triangles AMH_a, BMH_b, CMH_c, ABC passent par un même point. (Meurice.)

714. Soient P, Q, R trois points d'une parabole tels, que les normales concourent en un même point.

Les tangentes en ces points rencontrent une perpendiculaire à l'axe en trois points d'où l'on mène trois nouvelles tangentes à la courbe.

Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle formé par ces dernières tangentes passe par le sommet de la parabole.

(R. Tucker.)

×**715.** Si n est impair, le polynôme

$$x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1 \text{ est divisible par } x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

(Sharp.)

×**716.** Soit n_r le coefficient de x^r dans le développement de $(1+x)^n$. Démontrer les formules

$$n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \frac{1}{3}n_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$n_1 - 2n_2 + 3n_3 - \cdots + (-1)^n (n-1)\, n_{n-1} = 0. \quad (\textit{Ed. Times.})$$

×**717.** Soient (C_1), (C_2), (C_3) trois cercles ayant pour centres les points C_1, C_2, C_3. Les cercles décrits des milieux des droites C_1C_2, C_2C_3 comme centres et passant respectivement par les points d'intersection de (C_1) et (C_2), (C_2) et (C_3) se coupent sur l'axe radical de (C_1) et (C_3). (Cl. Servais.)

×**718.** Résoudre le système

$$xyz + x - y - z = a(1 + yz - zx - xy),$$
$$xyz + y - z - x = b(1 + zx - xy - yz),$$
$$xyz + z - x - y = c(1 + xy - yz - zx).$$

×**719.** Si A, B, C sont les angles d'un triangle,

$$\Sigma \sin^2(A - B) - \Sigma \sin(A - B)\sin(A - C)\cos A =$$
$$\tfrac{1}{2}(1 - 8\cos A \cos B \cos C)\,\Sigma \sin^2 A. \quad \text{(Edwards.)}$$

×**720.** Quel que soit l'entier n, $n^{13} - n$ est divisible par 2730.

(Anthony.)

SUR LE THÉORÈME DE JOACHIMSTHAL;

par M V. JAMET, professeur au Lycée de Marseille.

La démonstration suivante, en même temps qu'elle fait connaître l'équation du cercle de Joachimsthal, par rapport à un système d'axes convenablement choisis, permet d'établir avec la plus grande facilité certaines propriétés, énoncées en 1878, par M. Gohierre de Longchamps (N. C. M., p. 279, t. IV), notamment celle-ci : « *Le cercle qui « passe par les pieds de trois normales menées d'un même point à une « conique, passe aussi par la projection du centre sur la tangente, au « point diamétralement opposé au pied de la quatrième normale.* »

En effet, rapportons la conique à cette quatrième normale prise pour axe des y et à la tangente au pied, O, de cette normale. Soit

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0 \qquad (1)$$

son équation. Les pieds des normales menées à cette conique par un point P, de coordonnées 0, β, sont sur l'hyperbole qui a pour équation

$$-x(Bx + Cy + E) + (y - \beta)(Ax + By) = 0,$$

ou

$$Bx^2 + (C - A)xy - By^2 + (A\beta + E)x + B\beta y = 0.$$

Considérons maintenant la cubique représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ey, & Bx^2+(C-A)xy-By^2+(A\beta+E)x+B\beta y \\ Ax+By, & \lambda x+\mu y+\nu, \end{vmatrix} = 0.$$

Elle passe évidemment par les pieds des quatre normales considérées, notamment par le point O, et par le point diamétralement opposé au point O; car ce point est sur la droite qui a pour équation

$$Ax + By = 0 \quad \text{ou} \quad f'_x(x, y) = 0.$$

Je dis maintenant qu'on peut disposer des coefficients λ, ν, de telle sorte que cette cubique se décompose en une droite passant par l'origine, et une conique; celle-ci passera par les pieds des trois normales, autres que PO, et par le point diamétralement opposé au point O; et nous montrerons que, pour une valeur particulière de μ, cette conique devient un cercle.

Observons d'abord qu'en retranchant des éléments de la première ligne

du déterminant précédent, les éléments de la deuxième ligne multipliés par x, on transforme la première ligne comme il suit

$$Bxy + Cy^2 + 2Ey,$$
$$(B - \lambda)x^2 + (C - A - \mu)xy - By^2 + (A\beta + E - \nu)x + B\beta y.$$

Donc, ce déterminant sera divisible par y, si l'on fait :

$$\lambda = B, \quad \nu = A\beta + E,$$

et la conique cherchée sera représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} Bx + Cy + 2E, & (C - A - \mu)x - By + B\beta \\ Ax + By, & Bx + \mu y + A\beta + E \end{vmatrix} = 0.$$

Je dis maintenant qu'on peut déterminer μ de telle sorte que cette conique soit un cercle. En effet, l'égalité des coefficients de x^2 et y^2 exige qu'on ait :

$$B^2 - A(C - A - \mu) = C\mu + B^2 \quad \text{ou} \quad \mu = -A,$$

et le coefficient de xy étant égal à

$$B\mu + AC - B(C - A - \mu) + AB \quad \text{ou} \quad 2B(\mu + A),$$

on voit qu'il s'annule quand on y fait $\mu = -A$.

En résumé, l'équation du cercle de Joachimsthal est la suivante :

$$\begin{vmatrix} Bx + Cy + 2E, & Cx - By + B\beta \\ Ax + By, & Bx - Ay + A\beta + E \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de cette équation montre que l'abscisse du centre de ce cercle est égale à

$$-\frac{3}{2}\frac{EB}{B^2 - AC}.$$

Si donc le point P se meut sur Oy, le centre du cercle se meut sur une droite parallèle à Oy, équidistante du point Q, diamétralement opposé au point O, et du centre de la conique (1); donc la circonférence passe constamment par le point symétrique de Q par rapport à cette droite, c'est-à-dire par la projection du centre de la conique sur sa tangente en Q.

Parmi les propositions énoncées par M. G. de Longchamps auxquelles nous avons déjà fait allusion, il en est une, particulièrement remarquable, que nous pouvons énoncer ainsi : « *Si le point* P *décrit la normale* Oy, *un quelconque des côtés du triangle formé par les pieds des trois*

autres normales issues du point P, *enveloppe une parabole.* » On peut regarder ce théorème comme une conséquence du suivant : « *Si toutes les coniques d'un faisceau linéaire coupent une conique fixe*, E, *en un point fixe* Q, *toute corde commune à la conique fixe et à l'une des coniques du faisceau, enveloppe une conique inscrite dans le triangle formé par les trois autres points communs à toutes les coniques du faisceau.* » Il s'agit, bien entendu, des cordes communes qui ne passent pas par le point Q.

Voici la démonstration de cette proposition. Soit $S = 0$ l'équation de la conique E, rapportée à deux axes issus du point Q, et soient x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 les coordonnées homogènes des trois points, autres que Q, communs à la conique S et aux coniques du faisceau ; soit encore S_i la valeur que prend le polynôme S, supposé homogène, quand on y remplace x, y, z par x_i, y_i, z_i. L'équation d'une conique du faisceau est de la forme

$$S = (ux + vy)(\lambda x + \mu y + \nu z)$$

λ, μ, ν désignant les coordonnées de la droite dont nous cherchons l'enveloppe. On peut encore écrire l'équation précédente comme il suit

$$ux + vy = \frac{S}{\lambda x + \mu y + \nu z}.$$

Si l'on exprime, par trois équations, que cette conique passe par les trois points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), et si l'on élimine u, v entre ces trois équations, on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée sous la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dfrac{S_1}{\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1} \\ x_2 & y_2 & \dfrac{S_2}{\lambda x_2 + \mu y_2 + \nu z_2} \\ x_3 & y_3 & \dfrac{S_3}{\lambda x_3 + \mu y_3 + \nu z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

D'après cette équation, la courbe cherchée est de deuxième classe, et compte, parmi ses tangentes, l'une quelconque des trois droites passant par deux points définis, chacun, par une équation de la forme

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = 0.$$

Ces droites sont les trois côtés du triangle dont il a été question dans l'énoncé.

On trouverait, sans difficulté, l'équation tangentielle de la corde commune à une conique fixe et à une autre conique passant par quatre points fixes dont aucun n'est situé sur la conique donnée. Cette enveloppe est de la troisième classe et touche les six droites qui joignent deux quelconques des points de base du faisceau.

Mais revenons au cas où le point Q est sur la conique fixe E. Si deux des points de base sont rejetés à l'infini dans des directions données, les coniques du faisceau sont homothétiques à une conique fixe, et la conique, enveloppe des cordes communes, est une parabole tangente aux deux droites, parallèles aux asymptotes des coniques du faisceau, menées par celui des quatre points de base qui, sans être sur la conique E, est à distance finie. Mais ces directions asymptotiques peuvent être celles du cercle. Alors toutes les coniques du faisceau sont des cercles, et le point dont nous venons de parler est le foyer de la parabole enveloppe des cordes communes. Si ce point est la projection du centre de E sur sa tangente en Q, les coniques du faisceau sont les cercles de Joachimsthal relatifs aux points situés sur la normale à E, au point diamétralement opposé au point Q. On en conclut que la parabole dont il est question dans le théorème de M. de Longchamps a pour foyer la projection du centre de E sur la tangente à cette conique au point diamétralement opposé au pied de la normale fixe. Nous allons préciser davantage la détermination de cette parabole.

Elle est tangente aux deux axes de symétrie de E. En effet, désignons par O, comme au début de cet article, le pied de la normale fixe, par P le point où cette normale coupe l'un des axes de symétrie de E. Parmi les normales issues de P, il en est deux qui sont dirigées suivant cet axe; et celui-ci coïncide avec la droite qui joint les pieds de ces deux normales. C'est donc une tangente à la parabole considérée. Donc, *la parabole de M. de Longchamps a pour directrice la droite qui joint le centre de* E *au point symétrique du foyer de cette parabole par rapport à l'un quelconque des axes de* E.

En outre, *les points de contact de cette parabole avec les axes de* E *sont sur la tangente à* E, *au point diamétralement opposé à* O. Car si l'on désigne par E le foyer de cette parabole, par C le centre de E, cette tangente est, comme on l'a déjà vu, perpendiculaire à CF, au pointF.

Marseille, 20 mars 1891.

BIBLIOGRAPHIE.

Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre par Cl. Thiry, professeur de mathématiques. — Gand, Hoste, éditeur; Paris, Gauthier-Villars et fils. — (In-8° de 91 pages) Prix : 2 fr.

Cette brochure reproduit la substance de l'opuscule que M. Thiry a publié en 1887 sur le théorème de Stewart, mais avec une foule d'applications instructives et intéressantes qui en font un livre très utile à consulter par les professeurs et les élèves. Elle comprend six chapitres portant les titres suivants :

I. Diverses formes du théorème de Stewart, conséquences classiques (pp. 5-17). II. Applications diverses relatives au triangle (pp. 18-48). III. Applications relatives au quadrilatère (pp. 48-55). IV. Applications relatives au cercle (pp. 55-57). V. Lieux géométriques (pp. 57-65). VI. Barycentre (pp. 65-82). — Exercices proposés (au nombre de 34).

Ne pouvant analyser en détail l'ouvrage de M. Thiry, nous nous bornons à en signaler quelques passages qui suffisent pour donner à nos lecteurs une idée de la valeur du livre.

Dans le chapitre I, on rencontre la formule suivante :

$$\overline{AB}^2 . \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 . \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2 . AM^2,$$

où M est un point de l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC.

Le chapitre II (dont une partie a été insérée dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*) renferme un grand nombre de résultats élégants, notamment les expressions des segments compris entre deux points remarquables du plan d'un triangle ABC, et celles des puissances de ces points par rapport à certains cercles (cercles de Brocard et de Lemoine; cercles GH, HK, etc.); l'une des formules conduit au théorème sur le contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit. L'auteur tire un excellent parti de la relation suivante qui lui est propre :

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a^n . \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - \left(\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \Sigma a^{n-2} b^{n-2};$$

P est un point quelconque du plan ABC, et K_n désigne l'intersection des droites menées par les sommets et divisant les côtés opposés dans le rapport des puissances n^{es} des côtés adjacents(*).

Le chapitre V traite huit lieux géométriques; c'est là une matière qui est souvent négligée dans les cours de géométrie élémentaire.

Nous ne pouvons qu'approuver M. Thiry d'avoir introduit dans son livre une théorie purement géométrique du barycentre, avec quelques applications intéressantes; les bons élèves de nos classes scientifiques auront ainsi l'occasion de se familiariser avec une notion qui a une grande importance en mécanique, mais aussi en géométrie pure. (J N.)

(*) La démonstration du théorème arithmétique de la page 23 est inexacte. Pour démontrer ce théorème, il suffit d'observer que les seuls carrés entiers ayant pour différence 5, sont 4 et 9; ce qui conduit à poser $9(1+K) = 9$, $K = 0$, $n = 1$.

Note sur la décomposition en facteurs des quantités algébriques, suivie d'une note sur la discussion des problèmes du premier degré, à l'usage de l'enseignement moyen et normal par P. BRASSEUR, *Professeur à l'École normale de Lierre. Cinquième édition, revue et augmentée.* — Lierre, chez l'auteur, 1891 (In 8° de 32 + 48 pages). Prix : fr. 1,10.

Nous avons déjà rendu compte dans *Mathesis* de la note sur la décomposition en facteurs. L'opuscule étant arrivé à sa cinquième édition, nous pouvons nous dispenser d'en faire de nouveau l'éloge. Signalons cependant le changement suivant qui constitue une amélioration : Le théorème relatif à la divisibilité d'un polynôme entier en x par $x - a$ a été démontré dans toute sa généralité, et les propositions sur la division de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$ en ont été déduites comme corollaires, au lieu d'être établies par la considération d'exemples particuliers.

Une addition importante est venue enrichir la nouvelle édition; l'auteur a introduit une note sur la discussion des problèmes du premier degré. Cette partie se recommande aux professeurs et aux élèves par un exposé clair de la marche à suivre pour la discussion, un bon choix d'exemples développés et de problèmes proposés. Nous aurions bien à faire quelques réserves sur plusieurs points : par exemple, les systèmes d'équations peuvent donner à la fois les deux symboles (0 : 0) et A : 0); le problème de la page 37 conduit à une discussion fort longue qui peut être abrégée au moyen de quelques notions sur les distances positives ou négatives introduites comme données d'une question. Mais tel qu'il est, cet essai peut déjà rendre de grands services dans l'enseignement élémentaire de l'Algèbre. (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

4. ***Sur divers articles de Mathesis.*** 1° M. E. HABICH, directeur de l'École spéciale des Constructions et des Mines, à Lima, a publié, dans les *Mondes* de Moigno, t. XI, p. 307 et suivantes (1866), une note ***Sur le mouvement conchoïdal,*** où l'on trouve quelques-uns des théorèmes énoncés dans *Mathesis*, (1), X, p. 9-14.

2° La méthode de soustraction des fractions, signalée dans *Mathesis*, (2), I, p. 92, se trouve dans le *Précis d'Arithmétique* de M. C. BERGMANS, 1re édition, n° 364, p. 171 (1884).

3° La formule de M. d'Ocagne dont il est question dans la note deuxième de la page 87 du présent volume de *Mathesis*, avait été publiée par l'auteur, dès 1887, dans les *Annales de l'École normale supérieure* (p. 313). M. d'Ocagne donne, dans ce petit mémoire, la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques, dans le cas où la courbe directrice est une conique quelconque.

×5. ***Problème du puits.*** Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé un nombre θ de secondes, entre l'instant où l'on a laissé tomber la pierre et celui où le bruit qu'elle a fait, en frappant le fond, est revenu à l'oreille. (BERTRAND, *Traité d'Algèbre*, 3e édition, liv. III, ch. IV, § 1, p. 311-314). L'équation du problème est

$$\frac{x}{v}+\sqrt{\frac{2x}{g}}=\theta.$$

On abrège notablement la discussion en prenant pour inconnue $\sqrt{x}$, ce qui permet d'écarter immédiatement la solution négative (E. GELIN).

×6. ***Problème d'Algèbre*** (par M. l'abbé E. GELIN, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy). ***Un père partage son héritage entre ses enfants de la manière suivante : le premier prendra une somme*** a ***et la*** n^e ***partie du reste ; le second, une somme*** 2a ***et la*** n^e ***partie du reste ; le troisième, une somme*** 3a ***et la*** n^e ***partie du reste, et ainsi de suite. Il arrive que l'héritage est entièrement partagé et que les enfants ont reçu des parts égales. On demande la valeur de l'héritage, le nombre des enfants et la part de chacun d'eux.***

Première solution. Soient x la valeur de l'héritage, y le nombre des enfants et z la part de chacun d'eux. En égalant les parts des deux premiers enfants, on a

$$a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{x-\left(a+\frac{x-a}{n}\right)-2a}{n},$$

d'où

$$x=(n-1)^2 a.$$

On a ensuite

$$z=a+\frac{x-a}{n}=(n-1)\,a, \quad y=\frac{x}{z}=n-1.$$

Comme on ne s'est servi, pour mettre le problème en équation, que de l'égalité des deux premières parts, il est nécessaire de vérifier que les autres parts sont égales à $(n-1)\,a$. On trouve, en effet, pour la part z' du p^e enfant,

$$z'=pa+\frac{(n-1)^2 a-(p-1)(n-1)a-pa}{n}=(n-1)\,a.$$

Deuxième solution. Soit y le nombre des enfants. La part du dernier enfant sera ay, et, puisque toutes les parts sont égales, la valeur de l'héritage est $ay \times y$ ou ay^2.

En égalant les parts du premier et du dernier enfant, on a l'équation

$$a + \frac{ay^2 - a}{n} = ay, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2 - 1}{n} = y - 1,$$

d'où $y = 1$ ou $n - 1$, etc.

Cette seconde solution suppose que la somme des parts est ay^2, ce qui n'exige pas nécessairement que chaque part soit égale à ay, mais seulement que *la moyenne des parts* soit ay. Il faut donc, dans cette solution comme dans la première, vérifier que toutes les parts sont égales.

Troisième solution. Soient x le montant de l'héritage et z la valeur de chaque part. Si l'on exprime que la part du p^e enfant est égal à z, on a l'équation

$$z = pa + \frac{x - (p-1)z - pa}{n},$$

ou

$$p[z - (n-1)a] = x - (n-1)z.$$

Cette équation devant être indépendante de la valeur de p, on a

$$z = (n-1)a, \qquad x = (n-1)z = (n-1)^2 a.$$

Quatrième solution. Soient encore x le montant de l'héritage et z la valeur de chaque part. En exprimant que les parts du p^e et du $(p+1)^e$ enfant sont égales, on a l'équation

$$pa + \frac{x - (p-1)z - pa}{n} = (p+1)a + \frac{x - pz - (p+1)a}{n},$$

ou

$$\frac{z}{n} = a - \frac{a}{n}.$$

Cette équation est indépendante de p et donne

$$z = (n-1)a.$$

On a ensuite, en égalant la part du premier enfant à $(n-1)a$,

$$a + \frac{x - a}{n} = (n-1)a,$$

d'où

$$x = (n-1)^2 a(*).$$

(*) On trouve, dans le *Traité d'Arithmétique* de M. Gelin, troisième édition, page 404, et cinquième édition, page 403, trois solutions arithmétiques du même problème.

*QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Limite du produit d'un nombre fini de variables commensurables ayant des limites commensurables.

1. Théorème. *La limite du produit d'un nombre fini de variables commensurables, dont chacune a une limite commensurable, est égale au produit de ces limites.*

1° Soient, par exemple, u, v, deux variables commensurables, positives ou négatives, ayant respectivement pour limites les constantes commensurables a, b. Cela signifie que les différences

$$\alpha = u - a, \quad \beta = v - b$$

peuvent devenir et rester aussi petites que l'on veut, en valeur absolue. Posons

$$\delta = uv - ab = (a + \alpha)(b + \beta) - ab.$$

On aura

$$\delta = \alpha b + a\beta + \alpha\beta.$$

Puisque α et β peuvent devenir et rester, en valeur absolue, aussi petits que l'on veut, il en est de même de αb et $a\beta$, et aussi de $\alpha\beta$(*); donc δ peut aussi devenir et rester aussi petit que l'on veut, en valeur absolue. On a donc, d'après la définition de la limite, $\lim uv = ab$.

2° Si u, v, w, t sont des variables commensurables, positives ou négatives, ayant des limites commensurables, on aura, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\lim(uv) = \lim u \times \lim v, \quad \lim(uvw) = \lim(uv) \times \lim w,$$
$$\lim(uvwt) = \lim(uvw) \times \lim t.$$

Par suite,

$$\lim(uvwt) = \lim u \times \lim v \times \lim w \times \lim t.$$

On étendrait de même le principe à un nombre fini quelconque de variables.

(*) Par exemple, si δ doit être inférieur à ε, on prendra, en valeur absolue, α inférieur à 1, à $\frac{1}{3}\varepsilon$, et à la valeur absolue de $(\varepsilon : 3b)$; β inférieur à 1 et à la valeur absolue de $(\varepsilon : 3a)$. On aura, en valeur absolue,

$$\alpha b < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad a\beta < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \alpha\beta < \alpha < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \alpha b + a\beta + \alpha\beta < \varepsilon.$$

2. *Démonstration directe dans le cas général.* Supposons que les n variables commensurables u, v, ..., w, t aient respectivement pour limites les constantes commensurables a, b, ..., c, d, de manière que les quantités

$$\alpha = u - a, \quad \beta = v - b, \quad \ldots, \quad \gamma = w - c, \quad \delta = t - d,$$

puissent devenir et rester, en valeur absolue, aussi petites qu'on le veut. Posons

$$\Delta = uv \ldots wt - ab \ldots cd.$$

On a

$$\left.\begin{aligned} \Delta = {} & (uv \ldots wt - uv \ldots w\delta) \\ & + (uv \ldots w\delta - uv \ldots c\delta) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (ub \ldots c\delta - ab \ldots c\delta) \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} & uv \ldots w\delta \\ & + uv \ldots \gamma d \\ & \cdots\cdots \\ & + \alpha b \ldots cd \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Soit M une quantité positive supérieure, en valeur absolue, à u, v, ..., w, t, a, b, ... c, d. On aura évidemment, en valeur absolue encore,

$$\begin{aligned} uv \ldots w\delta &< M^{n-1}\delta, \\ uv \ldots \gamma d &< M^{n-1}\gamma, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha b \ldots cd &< M^{n-1}\alpha. \end{aligned}$$

Par suite, si l'on suppose α, β, ..., γ, δ, en valeur absolue, inférieures à ε, on aura

$$\Delta < nM^{n-1}\varepsilon$$

en valeur absolue, et, si l'on prend

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{nM^{n-1}},$$

ε' étant aussi petit qu'on le veut, on a $\Delta < \varepsilon'$, en valeur absolue. Donc

$$\lim(uv \cdots wt) = ab \cdots cd = \lim u \times \lim v \times \cdots \times \lim w \times \lim t. \quad (2)$$

3. Remarques. I. La démonstration précédente subsiste, si une ou plusieurs des quantités u, v, ..., w, t sont constantes, c'est-à-dire, si une ou plusieurs des quantités α, β, ..., γ, δ sont nulles.

II. Il en est de même si le produit $uv \cdots wt$ est constant, bien que tous ou plusieurs de ses facteurs soient variables. Alors Δ est une constante; mais cette constante ne peut être différente de zéro, sans quoi, on ne pouvait avoir $\Delta < \varepsilon'$, ε' étant aussi petit qu'on le veut. On a donc $\Delta = 0$, ou

$$uv \cdots wt = ab \cdots cd,$$

égalité qui prend encore la forme (2), si l'on se souvient que, par définition, la limite de la quantité constante $uv \cdots wt$, est cette constante même.

III. La démonstration du théorème suppose que les limites $a, b \cdots c, d$ sont finies, puisque dans le cas contraire, les égalités $\alpha = u - a$, $\beta = v - b$, etc. n'auraient plus aucun sens.

Si une ou plusieurs des quantités $u, v, \cdots w, t$ croissent indéfiniment en valeur absolue, tandis que les autres restent toujours supérieures à une quantité finie m, le produit $uv \cdots wt$ est supérieur, en valeur absolue, à m^{n-1} multiplié par la valeur absolue de l'une des variables qui croît indéfiniment. On a donc $\lim (uv \cdots wt) = \infty$. Dans ce cas, l'on peut dire, en un certain sens, que l'égalité (2) subsiste encore.

Si l'une des quantités $u, v, \cdots w, t$ croît indéfiniment, en valeur absolue, tandis qu'une autre a pour limite zéro, le second membre de (1) prend la forme indéterminée $0 \times \infty$. Bien loin que, dans ce cas, le second membre de (2) fasse connaître la valeur du premier, c'est le plus souvent le premier qui, par convention, est regardé comme donnant la valeur du second.

IV. La démonstration du théorème des n^os 1 et 2 suppose le nombre n des facteurs fini et déterminé. Si n croissait indéfiniment, la somme des n quantités indéfiniment décroissantes (1) pourrait ne pas avoir zéro pour limite, et la formule (2) pourrait ne pas subsister.

Voici un exemple simple des conclusions erronées auxquelles elle peut conduire quand on l'applique abusivement au cas où n est indéfiniment croissant. On a, pour n entier positif,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

le nombre des facteurs du second membre étant m. Appliquons la formule (2), il viendra

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim\left(1+\frac{1}{m}\right) \times \lim\left(1+\frac{1}{m}\right) \times \cdots = 1 ;$$

résultat absurde, puisque

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \text{etc.}$$

surpasse toujours 2. (P. M.)

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 90.)

5. On donne deux segments de droite AB et A'B' tels que les droites AA', BB' soient parallèles. Soit M' un point quelconque de A'B'; par B' on mène une parallèle à AM', et par A' une parallèle à M'B; ces parallèles se coupent en M. Démontrer que le point M parcourt la droite AB. (D'OCAGNE.)

Lorsque M' décrit le droite A'B', les droites AM', BM' engendrent deux faisceaux projectifs; donc les droites A'M, B'M se correspondent également dans deux faisceaux projectifs, qui sont même perspectifs à cause du rayon uni A'B' qui correspond au point M' pris à l'infini sur A'B'. Lorsque M' est en A' ou B', M est en B ou en A; donc le lieu de M est la droite AB.

6. Les droites qui joignent les sommets B, C d'un triangle ABC à un même point M rencontrent les côtés opposés aux points B', C'. Trouver le lieu decrit par M lorsque les droites BB', CC' sont proportionnelles aux côtés BA, CA. (SOLLERTINSKY.)

Les triangles ABB', ACC' peuvent être semblables; alors les angles ABB', ACC' étant égaux, les droites BB', CC' se correspondent dans deux faisceaux inversement égaux et M décrit une conique passant par B, C, A et l'orthocentre H; le lieu est donc une hyperbole équilatère ayant pour centre le milieu de BC. Soit CC'_1 la symétrique de CC' par rapport à la hauteur CH; les droites BB', CC'_1 satisfont à la condition du problème; comme elles se correspondent dans deux faisceaux égaux, leur point de concours décrit la circonférence BHC.

7. On donne, dans un même plan, deux triangles ABC, A'B'C' et un point O. Si les droites OA', OB', OC' rencontrent BC, CA, AB en trois points situés en ligne droite, les droites OA, OB, OC rencontrent également B'C', C'A', A'B' en trois points qui sont en ligne droite.

En effet, il résulte de l'hypothèse que le faisceau (O, AA' BB' CC') est involutif; car les rayons aboutissent aux six sommets d'un quadrilatère complet. Par conséquent, en appliquant la réciproque, on voit que OA, OB, OC coupent les côtés du triangle A'B'C' en trois points qui sont en ligne droite.

Le théorème précédent nous a été communiqué par M. Sollertinsky

comme étant la proposition corrélative de la question proposée n° 150, *Mathesis*, (1), t. II, p. 144 et résolue, t. III, p. 86.

8. Sur un diamètre AB d'un cercle O, on prend deux points M, N équidistants du centre O. On joint les points M, N, O à un point quelconque P de la circonférence par des droites qui rencontrent cette même circonférence en C, D, T. Démontrer que les droites AB, CD se coupent sur la tangente en T au cercle. (*J de Vuibert.*)

Le point P étant supposé fixe, les droites PM, PN se correspondent dans une involution; donc la corde CD passe par un point fixe. Deux positions de cette corde sont le diamètre AB et la tangente en T.

Si les points M et N sont fixes et le point P mobile sur la circonférence, la droite CD enveloppe une conique qui touche le cercle en A et B; car à un point C correspondent deux cordes CD. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 655.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 172.)

On décompose, au hasard, le nombre $2a$ *en deux parties positives* x, y. *Quelle est la probabilité que la somme* $m^2x^2 + n^2y^2$ *soit comprise entre* p^2a^2 *et* q^2a^2 ? m, n, p, q *sont des nombres donnés.*

Solution par M. Kluyver (Bréda). Nous regardons les quantités variables $x' = mx$, $y' = ny$ comme les coordonnées rectangulaires d'un point M. L'équation

$$x + y = 2a, \quad \text{ou} \quad nx' + my' = 2amn$$

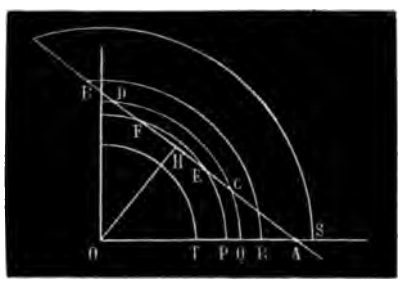
représente une droite AB qui intercepte sur les axes OX, OY les segments $OA = 2ma$, $OB = 2na$. Tout point du segment AB correspond à une décomposition de $2a$ en deux parties positives.

De même les équations

$$m^2x^2 + n^2y^2 = p^2a^2, \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 = p^2a^2,$$
$$m^2x^2 + n^2y^2 = q^2a^2, \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 = q^2a^2,$$

représentent deux circonférences P, Q ayant pour centre commun O. Un point M compris entre ces deux circonférences est tel que la somme $x'^2 + y'^2$ des carrés de ses coordonnées est comprise entre p^2a^2 et q^2a^2.

Pour fixer les idées, nous supposons $m > n$, $p > q$. Considérons, pour faciliter la discussion, d'abord le cas où les circonférences P, Q coupent AB aux points C et D, E et F compris entre A et B. On voit immédiatement que les points du plan qui correspondent à une décomposition favorable de $2a$ sont ceux des segments CE, FD, de sorte que la probabilité cherchée est



$$W = \frac{CE + FD}{AB} = \frac{CD - EF}{AB}.$$

Menons OH perpendiculaire à AB. On trouve facilement

$$AB = 2a\sqrt{m^2 + n^2}, \quad OH = \frac{2amn}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$CD = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OH}^2} = \frac{aR_1}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad EF = \frac{aR_2}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

après avoir posé

$$R_1 = \sqrt{p^2(m^2 + n^2) - 4m^2n^2}, \quad R_2 = \sqrt{q^2(m^2 + n^2) - 4m^2n^2}.$$

Par conséquent, dans le cas considéré,

$$W = \frac{CD - EF}{AB} = \frac{R_1 - R_2}{m^2 + n^2}.$$

Les différentes positions des circonférences P, Q par rapport à la droite AB sont représentées dans la figure par T, P, R, S. En examinant toutes les combinaisons possibles, on parvient à dresser le tableau suivant :

I. $p < \frac{2mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; C, D, E, F sont imaginaires ; $W = 0$.

II. $q < \frac{2mn}{\sqrt{m^2 + n^2}} < p$; E, F sont imaginaires ; C, D sont réels.

1. $2m > p$.

α. $2n > p$; ordre des points : ACDB ;

$$W = \frac{CD}{AB} = \frac{R_1}{m^2 + n^2}.$$

β. $p > 2n > q$; ordre des points : ACBD ;

$$W = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(mn + \tfrac{1}{2} R_1).$$

2. $p > 2m > q$; ordre des points : CABD ;

$$W = 1.$$

III. $q > \dfrac{2mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; C, D, E, F sont réels.

1. $2m > p$.

α. $2n > p$; ordre des points : ACEFDB ;

$$W = \frac{R_1 - R_2}{m^2 + n^2}.$$

β. $p > 2n > q$; ordre des points : ACEFBD ;

$$W = \frac{BC - EF}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(mn + \tfrac{1}{2} R_1 - R_2).$$

γ. $q > 2n$; ordre des points : ACEBFD ;

$$W = \frac{EC}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(\tfrac{1}{2} R_1 - R_2).$$

2. $p > 2m > q$.

α. $p > 2n > q$; ordre des points : CAEFBD ;

$$W = \frac{AB - EF}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(m^2 + n^2 - R_2).$$

β. $q > 2n$; ordre des points : CAEBFD ;

$$W = \frac{AE}{AB} = 1 - \frac{mn - \tfrac{1}{2} R_2}{m^2 + n^2}.$$

3. $q > 2m$; ordre des points : CEABFD ;

$$W = 0.$$

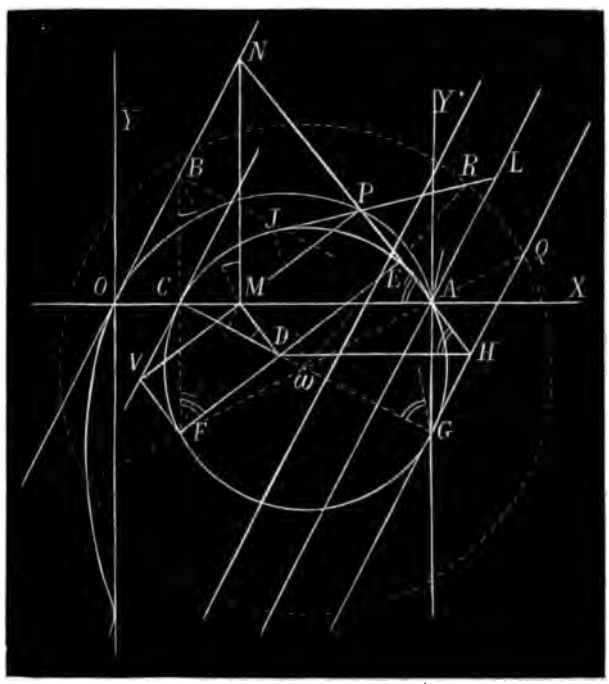
Note. Pour les méthodes *élémentaires* servant à résoudre ce genre de questions, voir *Mathesis*, t. II, pp. 177-179 et t. III, p. 233-237 (Cesàro) ; N. C. M., V, 1879, p. 103 et *Butletin de la Soc. math. de France*, XI, 1883, p. 13-25 (Lemoine) ; A. F. Paris, 1878, p. 138-139 (Lalanne).

Question 684.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 128.)

Trouver le lieu du point de contact de deux séries de circonférences, les unes tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY, ***les autres tangentes à*** OX ***en un point fixe*** A. (H. Brocard.)

Solution analytique par MM. Déprez, de Bőzóky ***et*** Decamps(*). Prenons pour origine des coordonnées le point A, pour axes AO et une



perpendiculaire AY'. Désignant la distance AO par δ, le rayon d'une circonférence Σ touchant AO en A par α, celui d'une circonférence Σ' touchant la précédente et les droites OX, OY par β, nous aurons pour

(*) La figure ci-jointe est due à M. Jeřábek ; elle renferme des lignes se rapportant à des détails que le défaut d'espace nous empêche de reproduire. (J. N.)

les coordonnées des centres $(0, \alpha)$, $(\delta - \beta, \beta)$; d'où les coordonnées du point de contact P des deux circonférences

$$x = \frac{\alpha(\delta - \beta)}{\alpha + \beta}, \quad y = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \tag{1}$$

car ce point divise la distance des centres dans le rapport des rayons. En écrivant que la distance des centres est égale à la somme des rayons, nous trouvons aussi

$$4\alpha\beta = (\delta - \beta)^2. \tag{2}$$

Des relations (1), on déduit

$$\frac{y}{x} = \frac{2\beta}{\delta - \beta}; \text{ donc } \beta = \frac{\delta y}{2x + y}, \quad \alpha = \frac{\delta y}{2\delta - x - y};$$

en substituant ces valeurs dans (2), nous obtenons pour le lieu cherché

$$(x^2 + y^2)(2x + y) - 2\delta x^2 = 0.$$

Ce lieu est donc une cubique circulaire, ayant pour asymptote la droite représentée par

$$y = -2x + \tfrac{2}{5}\delta;$$

elle passe par O et la tangente en ce point est parallèle à l'asymptote; le point A est un point de rebroussement avec AY′ pour tangente; les tangentes aux points cycliques se coupent en un point (foyer) ayant pour coordonnées

$$\left(-\frac{2\delta}{5}, -\frac{\delta}{5}\right),$$

et situé sur la courbe.

Remarques (dues à M. Déprez). 1° Appelons Δ l'asymptote, E le point de AO qui a pour abscisse $\frac{4}{5}\delta$, et soit Δ' la parallèle par E à Δ; enfin, soit K la circonférence qui passe par A et touche en E la droite Δ'. Si une sécante quelconque menée par A coupe Δ en M et K en N, et que l'on porte sur cette sécante une longueur MP = AM, le point P appartient à la cubique.

2° Cherchons l'enveloppe de la ligne des centres des circonférences Σ, Σ'. Pour cela, adoptons des coordonnées parallèles (u, v), les origines étant A, O et les axes AY′, OY. Nous aurons

$$u = \alpha, \quad \frac{v - u}{\beta - u} = \frac{\delta}{\delta - \beta},$$

et en éliminant α, β entre ces relations et l'égalité (2) :

$$4uv(v - u + \delta) - \delta(u - \delta)^2 = 0.$$

3° L'enveloppe de la tangente commune au point P a pour équation en coordonnées parallèles

$$v(v+2u)(v-u)-2\delta u(u+v)=0.$$

On peut, de même, chercher l'enveloppe de la tangente commune extérieure et les lieux de ses points de contact avec Σ, Σ'.

Solution géométrique par M. Jeřabek. Soient Σ, Σ' deux circonférences qui se touchent mutuellement en P et dont la première est tangente aux droites OX, OY, et dont l'autre est tangente à OX au point donné A. La droite AP rencontre Σ en un second point N qui, d'après un théorème connu, est situé sur le diamètre passant par le point M où Σ touche OX. Le centre de Σ parcourt la bissectrice de l'angle XOY; il en résulte que N décrit une droite passant par O. L'angle MPN étant droit, on a la construction suivante du lieu cherché : *On donne deux droites* OX, ON *et un point* A *sur la première; une sécante quelconque menée par* A *coupant* ON *en* N, *on projette* N *en* M *sur* OX, *et* M *en* P *sur* ON. En faisant $AP=\rho$, $AO=\delta$, angle $OAN=\omega$, $AON=\theta$, on trouve pour équation du lieu

$$\rho=\delta\frac{\sin\theta\cos^2\omega}{\sin(\theta+\omega)}.$$

La droite MP enveloppe une parabole; car, lorsque AN tourne autour de A, la ponctuelle engendrée par M est projective avec la ponctuelle décrite par N et par suite avec le faiseeau déterminé par AN et aussi avec un faisceau dont le rayon est parallèle à MP. Pour trouver les éléments principaux de cette conique, menons AB perpendiculaire sur ON, BC perpendiculaire sur OA, CV perpendiculaire sur AB; enfin, soient F le symétrique de B par rapport à OX, et V le point de rencontre de MP avec CV. A cause des angles droits NBA, NMA, le quadrilatère NBMA est inscriptible; d'où

$$\textit{angle}\ NAB=NMB=MBC=MFC,$$

et comme les angles CVM, NAB ont leurs côtés perpendiculaires, les angles CVM, MFC sont égaux; donc le quadrilatère CMFV est inscriptible, et l'angle $FVM=FCM=\frac{1}{2}\pi$. Il résulte de là que l'enveloppe de MP est l'antipodaire de F par rapport à la droite CV; c'est donc une parabole ayant pour foyer F, pour tangente au sommet CV et pour directrice ON.

Le lieu de P est la podaire de A par rapport à cette parabole. C'est donc une cissoïdale de A par rapport à la circonférence qui a pour diamètre AF, et à la tangente GH menée au point G diamétralement opposé à C; car $AH = FV = EP$, E étant le point de rencontre de la circonférence avec AN.

Solutions par MM. Cristesco et A. Denys.

Question 702.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 32.)

Trouver le lieu du foyer d'une parabole touchant une logarithmique (équation $y = e^x$) *en un point variable* M *et l'axe des x au pied de l'ordonnée de* M. (H. Brocard.)

Solution par MM. Hacken et Déprez. Soient : N le pied de l'ordonnée de M, A le point de rencontre de la tangente en M avec l'axe Ox, Q et P les milieux de AN et AM, enfin C et B les milieux de MN et PQ. D'après un théorème connu, la parabole qui touche AN en N et AM en M passe par le milieu B de AC et admet pour tangente la droite PQ. Les deux tangentes QB, QN étant rectangulaires, le point Q appartient à la directrice de la parabole et le foyer F est la projection de Q sur sa polaire NB.

Soient (a, b) les coordonnées de M. La sous-tangente AN étant constamment égale à 1, les coordonnées des points Q, B sont

$$\left(a-\frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(a-\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right);$$

on en conclut les équations des droites BN, QF :

$$y = -\frac{b}{2}(x-a), \quad y = \frac{2}{b}\left(x-a+\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Entre ces égalités et l'équation $b = e^a$, il faut éliminer a et b. A cet effet, multiplions l'une par l'autre les équations (1) et résolvons l'équation ainsi obtenue par rapport à $x - a$; nous aurons

$$x-a = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}-y^2}, \quad b = \frac{2}{y}\left(\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}-y^2}\right). \tag{2}$$

Portant les valeurs de a et b dans l'équation $b = e^a$, ou $a = \operatorname{Log} b$, nous obtenons

$$x = -\frac{1}{4} \mp \sqrt{\frac{1}{16} - y^2} + \operatorname{Log}\left[\frac{2}{y}\left(\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - y^2}\right)\right].$$

Mais il est plus simple de résoudre les équations (1) par rapport à x et y et de regarder a comme un paramètre variable ; le lieu cherché sera représenté par le système d'équations

$$x = a - \frac{2}{e^{2a} + 4}, \quad y = \frac{e^a}{e^{2a} + 4},$$

ou, si l'on adopte b pour paramètre variable, par les formules :

$$x = \operatorname{Log} b - \frac{2}{b^2 + 4}, \quad y = \frac{b}{b^2 + 4}.$$

Un point *maximum* correspond à

$$y = \tfrac{1}{4}, \quad x = \operatorname{Log} 2 - \tfrac{1}{4}.$$

L'axe des x est une asymptote. La courbe présente deux points d'inflexion ayant même ordonnée $y = \frac{1}{8}$.

La même question a été résolue par MM Morel, ingénieur au Creusot; Bellens, instituteur à Anvers; P. Decamps, étudiant à Gand; les solutions, purement analytiques, sont un peu moins simples que la précédente. — M. Déprez traite également quelques autres questions se rattachant à la même figure : enveloppes de l'axe, de la directrice et de la tangente au sommet de la parabole, lieu du centre de courbure de la parabole en son point de contact avec la logarithmique; l'équation de ce lieu est $y = 2e^{-x}$.

×Question 703.

(Voir *Mathesis* (2) I, p. 32.)

1° *Si le nombre* $N = 100a + 10b + c$ *est divisible par* 131, *il en est de même du nombre*

$$N' = (c - a)^2 + (3a - b)(3c - b)$$

et réciproquement.

2° *Si le nombre* $N = 100a + 10b + c$ *est divisible par* 107, *il en est de même de* $N' = (7a - c)^2 + 7b^2$ *et réciproquement.* (R. Perrin.)

Les mots « et réciproquement » sont de trop. L'énoncé a été copié *textuellement*.

Solution par M. E. Gelin. 1° La condition

$$100a + 10b + c = \mathcal{M}\ 131 \quad \text{donne} \quad c = \mathcal{M}\ 131 - 100a - 10b;$$

d'où

$$N' = (\mathcal{M}\ 131 - 101\,a - 10\,b)^2 + (3a - b)(\mathcal{M}\ 131 - 300\,a - 31\,b)$$

$$= \mathcal{M}\ 131 + (30\,a - 10\,b)^2 + (3a - b)(-300\,a + 100\,b)$$

$$= \mathcal{M}\ 131 + 100\,(3\,a - b)^2 - 100\,(3a - b)^2 = \mathcal{M}\ 131.$$

La réciproque n'est pas vraie, comme on peut le vérifier sur le nombre 425 Si elle était vraie, comme la condition

$$(c - a)^2 + (3a - b)(3c - b) = \mathcal{M}\ 131$$

est symétrique par rapport à c et a, on aurait non seulement

$$100\,a + 10\,b + c = \mathcal{M}\ 131,$$

mais aussi

$$100\,c + 10\,b + a = \mathcal{M}\ 131, \quad \text{d'où} \quad c - a = \mathcal{M}\ 131,$$

et par suite

$$(3a - b)(3c - b) = \mathcal{M}\ 131,$$

et même

$$3a - b \quad \text{ou} \quad 3c - b = \mathcal{M}\ 131,$$

et en combinant avec $3\,(c - a) = \mathcal{M}\ 131$,

$$3c - b \quad \text{ou} \quad 3a - b = \mathcal{M}\ 131.$$

Les trois nombres $c - a$, $3a - b$, $3c - b$ seraient donc multiples de 131.

2° La condition

$$100\,a + 10\,b + c = \mathcal{M}\ 107 \quad \text{donne} \quad c = \mathcal{M}\ 107 - 100\,a - 10\,b;$$

donc

$$N' = (7a - c)^2 + 7b^2 = (\mathcal{M}\ 107 + 10\,b)^2 + 7b^2 = \mathcal{M}\ 107.$$

On peut vérifier sur le nombre 394 que la réciproque est fausse.

Solution par M. Emmerich. 1° En sous-entendant le module 131, on a

$$N \equiv -31a + 10b + c \equiv c - a - 10(3a - b).$$
$$N \equiv 100a + 10b - 130c \equiv -100(c - a) - 10(3c - b).$$

d'où, respectivement,

$$10(c - a)N \equiv 10(c - a)^2 - 100(c - a)(3a - b),$$
$$-(3a - b)N \equiv 100(c - a)(3a - b) + 10(3a - b)(3c - b),$$

et par addition

$$(-13a + b + 10c)N \equiv 10\{(c - a)^2 + (3a - b)(3c - b)\} \equiv 10N'.$$

Donc, si $N \equiv 0$, on a $N' \equiv 0$; mais la congruence $N' \equiv 0$ entraîne, soit $N \equiv 0$, soit $-13a + b + 10c \equiv 0$. La réciproque est donc fausse, comme on peut le voir aussi sur l'exemple $a = 10$, $b = -1$, $c = 0$

2° De même, en sous-entendant le module 107, on a

$$N \equiv -7a + 10b + c \equiv -(7a - c) + 10b,$$
$$10N \equiv -70a - 7b + 10c \equiv -10(7a - c) - 7b;$$

d'où l'on tire, respectivement,

$$(7a - c)N \equiv -(7a - c)^2 + 10b(7a - c),$$
$$10bN \equiv -10b(7a - c) - 7b^2.$$

En additionnant, on trouve

$$(7a + 10b - c)N \equiv -(7a - c)^2 - 7b^2 \equiv -N'.$$

Donc, si $N \equiv 0$, on a $N' \equiv 0$; mais si $N' \equiv 0$, on a $N \equiv 0$, ou $7a + 10b - c \equiv 0$.

Prenant $a = 1$, $b = 10$, $c = 0$, on voit également que la réciproque est fausse.

Ont résolu la même question MM. Russo, Knops, Mandart et Decamps.

ˣQuestion 706.

(Voir *Mathesis*, (2), 1, p. 79.)

On donne un tétraèdre ABCD *et une droite m. Des plans parallèles menés par* A, B, C, D *rencontrent m aux points* A', B', C', D' *par lesquels on mène des plans respectivement parallèles aux faces* BCD, CDA, DAB ABC. *Démontrer que le tétraèdre* A''B''C''D'' *formé par ces nouveaux plans est symétriquement égal au tétraèdre* ABCD. (J. Neuberg.)

Solution analytique par M. Déprez. Sans nuire à la généralité on peut faire passer la droite *m* par le sommet D. Si l'on adopte pour axes

DA, DB, DC et qu'on pose DA $= a$, DB $= b$, DC $= c$, les équations de trois plans parallèles menés par A, B, C sont

$\lambda(x-a)+\mu y+\nu z=0$, $\lambda x+\mu(y-b)+\nu z=0$, $\lambda x+\mu y+\nu(z-c)=0$.

Cherchons les coordonnées des intersections de ces plans avec la droite m que nous représentons par $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$; il nous suffit même de connaître le x de la première intersection, le y de la seconde, le z de la troisième; ces coordonnées sont

$$x=\frac{\lambda a\alpha}{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma},\quad y=\frac{\mu b\beta}{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma},\quad z=\frac{\nu c\gamma}{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}.$$

Ce sont là, évidemment, les coordonnées du point D''; on voit immédiatement qu'elles vérifient l'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Donc D'' est situé dans le plan ABC. Comme le plan A''B''C'' est parallèle au plan ABC et passe par le point D', qui est confondu avec D, les tétraèdres A''B''C''D'', ABCD ont même hauteur; leurs faces étant parallèles et les hauteurs égales, parallèles et de sens contraires, les deux polyèdres sont symétriquement égaux.

Remarque. Donnons à la droite m une position quelconque, et soient

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma},$$

ses équations. En opérant comme tantôt on trouve pour les coordonnées de D''

$$x=x_0+\frac{\lambda a\alpha-\alpha\Sigma\lambda x_0}{\Sigma\lambda\alpha},\quad y=y_0+\frac{\mu b\beta-\beta\Sigma\lambda x_0}{\Sigma\lambda\alpha},\quad z=z_0+\frac{\nu c\gamma-\gamma\Sigma\lambda x_0}{\Sigma\lambda\alpha}.$$

Si entre ces trois égalités on élimine λ, μ, ν on obtient l'équation du lieu décrit par le point D'' lorsque la direction des plans parallèles menés par A, B, C, D change. Ce lieu est un plan.

QUESTIONS D'EXAMEN.

490. Un nombre est divisible par 37 lorsque le quadruple du chiffre des unités augmenté du triple du nombre formé par les autres chiffres est divisible par 37.

Soit $N=10a+b$ le nombre; on a $4N=40a+4b=37a+(3a+4b)$, etc.

491. Lorsque le centre du cercle des neuf points du triangle ABC est situé sur le côté BC, la différence des angles B et C est égale à 90°.

En effet, le milieu du segment AH de la hauteur AA' est sur BC, etc.

492. Un cercle variable touche les côtés de l'angle donné XOY aux points A, B. D'un point fixe C de la droite OX, on mène une seconde tangente CD. Démontrer que la corde BD passe par un point fixe.

(BOURRIENNE.)

Si E est le centre du cercle, P le point de rencontre de BD avec la bissectrice OE de l'angle, XOY, on démontre que CP est perpendiculaire à OE.

493. Soient α, β, γ les longueurs des tangentes communes à deux des circonférences décrites sur les côtés du triangle ABC comme diamètres. Exprimer les côtés a, b, c en fonction de α, β, γ.

On part des équations

$$4x^2 = a^2 - (b-c)^2, \quad \text{ou} \quad x^2 = (p-b)(p-c).$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***721.** Éliminer x et y entre les équations

$$a\cos x + b\cos y = 1, \quad a\sin x + b\sin y = 1,$$
$$\sin 2x - \sin 2y = c^2(a^2 - b^2). \qquad \text{(TUCKER.)}$$

722. Soit O le milieu de la distance des points doubles de deux séries projectives superposées, déterminées par les trois couples de points correspondants m_1m_1, m_2m_3, m_3m_1. Si μ_2, μ_3, sont les milieux des segments m_1m_3, m_1m_2, démontrer que

$$(Om_1m_2m_3) = -\frac{\mu_2m_2}{\mu_3m_3}. \qquad \text{(CL. SERVAIS.)}$$

723. Soient CA, CB deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, et F l'un des foyers; on construit le parallélogramme FAVB. Démontrer 1° que la droite CV est dirigée suivant la bissectrice de l'angle AVB; 2° que $CV^2 = 2\,VA.VB$; 3° que le lieu du point V est une ellipse quand on fait varier le système des diamètres conjugués. — Etendre ces propriétés à l'hyperbole. (LAISANT.)

***724.** Deux circonférences A, B se coupent aux points C, D. Mener par un point donné E une droite telle que le segment intercepté sur cette ligne par les deux circonférences A, B soit vu du point C sous un angle donné γ. (MEURICE.)

SUR LES FOYERS DES CONIQUES;

par M. P. H. SCHOUTE, professeur à l'Université de Groningue.

1. Nous chercherons les foyers d'une conique au moyen de la condition que deux droites rectangulaires menées par un foyer soient conjuguées l'une à l'autre. Supposons la conique donnée par l'équation

$$A_u^2 \equiv (A_1 u + A_2 v + A_3)^2$$
$$\equiv A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0,$$

où u, v sont des coordonnées tangentielles, qui sont liées de la manière ordinaire à un système rectangulaire de coordonnées ponctuelles x, y. Nous nous servirons de ces deux systèmes de coordonnées, à la fois.

Soit (x', y') un foyer de la conique donnée et (u', v') une droite quelconque par ce point, de manière qu'on ait

$$u'x' + v'y' + 1 = 0. \tag{1}$$

La droite (u', v') est la polaire du point

$$A'_u A_u \equiv (A_1 u' + A_2 v' + A_3)(A_1 u + A_2 v + A_3) = 0,$$

c'est-à-dire du point

$$x = \frac{A_1 A'_u}{A_3 A'_u}, \quad y = \frac{A_2 A'_u}{A_3 A'_u}.$$

Donc l'équation de la droite qui joint ce point au point (x', y'), est

$$A'_u \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette droite est perpendiculaire à la droite (u', v') sous la condition

$$A'_u \{ u'(A_2 - A_3 y') + v'(A_3 x' - A_1) \} = 0; \tag{2}$$

comme l'équation (2) doit être une identité pour toutes les valeurs de u', v', qui vérifient l'équation (1), la conique (2) en u', v' doit se composer du point (1) en u', v' et d'un autre point. Mais le premier membre de (2) ne contient pas de terme constant. Nous pouvons donc poser

$$A'_u \{ u'(A_2 - A_3 y') + v'(A_3 x' - A_1) \} \equiv (u'x' + v'y' + 1)(\lambda u' + \mu v'),$$

où λ et μ sont des paramètres inconnus. Cette équation donne les conditions suivantes :

$$\frac{\lambda x'}{A_{12} - A_{13}y'} = \frac{\mu y'}{-A_{12} + A_{23}x'} = \frac{\lambda y' + \mu x'}{A_{22} - A_{11} + A_{13}x' - A_{23}y'}$$
$$= \frac{\lambda}{A_{23} - A_{33}y'} = \frac{\mu}{-A_{13} + A_{33}x'}.$$

Enfin l'élimination de λ et μ donne en supprimant les accents de x' et y'

$$\left.\begin{aligned} A_{33}xy - A_{23}x - A_{13}y + A_{12} &= 0 \\ A_{33}(x^2 - y^2) - 2A_{13}x + 2A_{23}y + A_{11} - A_{22} &= 0 \end{aligned}\right\}; \qquad (3)$$

ces deux équations prouvent que les foyers de la conique donnée sont les points d'intersection de deux hyperboles équilatères concentriques, pour lesquelles les asymptotes de l'une coïncident avec les axes de l'autre. Ces quatre points se trouvent donc sur deux diamètres de ces courbes. Et d'après le théorème qui dit que les quatre points d'intersection de deux hyperboles équilatères sont de quatre manières les sommets et l'orthocentre d'un triangle, ces deux diamètres sont des diamètres rectangulaires. Mais de deux diamètres rectangulaires l'un rencontre l'hyperbole équilatère en deux points réels, tandis que l'autre la rencontre en deux points imaginaires. Soient F et F_1 les foyers réels, G et G_1 les foyers imaginaires, O le centre commun des deux hyperboles équilatères. Comme $OF = F_1O$ et $OG = G_1O$ les droites imaginaires FG et F_1G_1 sont parallèles; mais d'après le théorème cité elles sont rectangulaires. Donc FG et F_1G_1 passent par un des points cycliques, etc.

Les coordonnées du centre commun des hyperboles équilatères, qui est en même temps le centre de la conique donnée, sont

$$x = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

La conique du faisceau (3), qui passe par ce point, fait donc connaître les axes de la conique donnée, etc.

2. Ce que nous venons de trouver, nous permet d'écrire immédiatement l'équation ponctuelle de la cubique, qui est le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques. En effet, remplaçons $A_{ik}^2 = 0$ par $B_{ik}^2 + \lambda C_{ik}^2 = 0$ et les équations (3) deviennent

$$B_{33}xy - B_{23}x - B_{13}y + B_{12} + \lambda(C_{33}xy - C_{23}x - C_{13}y + C_{12}) = 0,$$
$$B_{33}(x^2 - y^2) - 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{11} - B_{22}$$
$$+ \lambda\{C_{33}(x^2 - y^2) - 2C_{13}x + 2C_{23}y + C_{11} - C_{22}\} = 0.$$

En éliminant λ on trouve donc

$$\begin{vmatrix} B_{33}xy - B_{23}x - B_{13}y + B_{12}, & B_{33}(x^2 - y^2) - 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{11} - B_{22} \\ C_{33}xy - C_{23}x - C_{13}y + C_{12}, & C_{33}(x^2 - y^2) - 2C_{13}x + 2C_{23}y + C_{11} - C_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une cubique; car les termes du quatrième ordre se détruisent. Les termes du troisième ordre sont

$$-B_{33}\begin{vmatrix} 2xy, & C_{23}x + C_{13}y \\ x^2 - y^2, & C_{13}x - C_{23}y \end{vmatrix} + C_{33}\begin{vmatrix} 2xy, & B_{23}x + B_{13}y \\ x^2 - y^2, & B_{13}x - B_{23}y \end{vmatrix},$$

ou

$$(x^2 + y^2)\{(B_{33}C_{23} - B_{23}C_{33})x - (B_{33}C_{13} - B_{13}C_{33})y\}.$$

Donc la cubique en question est une cubique circulaire. Le facteur linéaire

$$(B_{33}C_{23} - B_{23}C_{33})x - (B_{33}C_{13} - B_{13}C_{33})y$$

fait connaître la direction de l'axe de la parabole comprise dans le faisceau.

Si le faisceau est un faisceau de paraboles, B_{33} et C_{33} sont nuls et les termes du troisième ordre se détruisent également. Donc le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle donné est une conique. Ce résultat est connu ; car le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes d'une parabole passant par le foyer, le lieu des foyers des paraboles inscrites à un triangle donné est le cercle circonscrit au triangle. Effectivement, les termes du second degré

$$4\begin{vmatrix} B_{23}x + B_{13}y, & C_{23}x + C_{13}y \\ B_{13}x - B_{23}y, & C_{13}x - C_{23}y \end{vmatrix}$$

admettent le facteur $x^2 + y^2$, etc.

Si les coniques du faisceau tangentiel sont concentriques, on a

$$\frac{B_{13}}{C_{13}} = \frac{B_{23}}{C_{23}} = \frac{B_{33}}{C_{33}}.$$

Dans ce cas, le lieu des foyers se réduit à la conique

$$\begin{vmatrix} B_{33}xy - B_{23}x - B_{13}y + B_{12}, & B_{33}(x^2 - y^2) - 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{11} - B_{12} \\ B_{33}C_{12} - B_{12}C_{33}, & B_{33}(C_{11} - C_{22}) - (B_{11} - B_{22})C_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

hyperbole équilatère, concentrique aux coniques du faisceau, etc.

Nous remarquons que la cubique circulaire, que nous avons engendrée au moyen de deux faisceaux projectifs d'hyperboles équilatères a

été trouvée géométriquement par M. Schroeter comme le lieu des points d'intersection des éléments correspondants de deux faisceaux projectifs de cercles. Au sujet de cette courbe, voir les articles suivants :

STEINER, *Journal de Crelle*, t. 45, p. 375; SCHRÖTER, *Mathematische Annalen*, t. 5, p. 50 ; PELZ, *Sitzungsberichte von Wien*, II, t. 64, p. 730 ; HERMES, *Journal de Crelle*, t. 97, p. 177; NEUBERG, *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. 1, p. 76 ; SCHOUTE, *Journal de Crelle*, t. 99, p. 98.

SUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DÉTERMINÉS PAR LA MÉTHODE DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES ;

(Extrait d'une lettre de M. G. DE LONGCHAMPS.)

A propos des deux exercices que vous avez aimablement cités à la p. 127 du n° de mai 1890, voulez-vous me permettre d'appeler votre attention sur la méthode que j'ai cherché à mettre en lumière, dans la petite note à laquelle vous avez emprunté les exercices en question.

Lorsque, dans un problème déterminé, deux inconnues x, y vérifient simultanément deux équations :

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0, \tag{1}$$

on fait partout la remarque évidente qu'en considérant x, y comme des coordonnées courantes, ces quantités x, y seront les coordonnées des points communs aux deux courbes U, V qui correspondent aux équations précédentes. Mais il arrive, le plus souvent, que cette méthode, qui ne laisse rien à désirer au point de vue de la théorie, devient impraticable, ou tout au moins compliquée, par suite du degré élevé des courbes considérées. L'idée, fort simple d'ailleurs, que j'ai voulu signaler dans la note citée est la suivante. Au lieu de construire les courbes U, V posons

$$x = f_1(X), \quad y = f_2(Y); \tag{2}$$

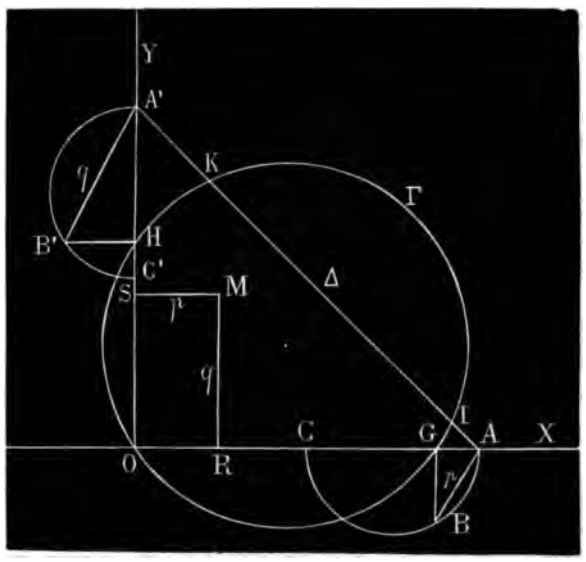
en choisissant $f_1(X)$, $f_2(Y)$ de façon à obtenir des équations plus simples que celles auxquelles a conduit la solution du problème envisagé. Alors, en déterminant les points communs aux courbes qui correspondent aux équations :

$$f\{f_1(X), f_2(Y)\} = 0, \quad \varphi\{f_1(X), f_2(Y)\} = 0,$$

on aura ensuite les inconnues principales x, y au moyen des formules (2).

Au fond, c'est la méthode, éternellement féconde, des transformations; méthode appliquée aux problèmes déterminés. L'exemple suivant fera peut-être mieux comprendre l'utilité de cette très petite remarque.

Je prends la question 440 de la p. 126 (*Mathesis*, t. X). Il s'agit, *deux droites rectangulaires* OX, OY *étant données, de mener par un point*



donné M, *pris dans le plan* XOY, *une transversale rencontrant* OX, OY *en des points* N, P *tels que*

$$\overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 = a^2.$$

Posons

$$MN = u, \quad MP = v;$$

nous avons

$$u^2 + v^2 = a^2, \tag{3}$$

puis

$$\frac{q^2}{u^2} + \frac{p^2}{v^2} = 1\,(*). \tag{4}$$

Si l'on voulait obtenir u, v par la méthode qu'on pourrait appeler la *méthode cartésienne*, il faudrait considérer u, v comme des coordonnées courantes et chercher l'intersection du cercle (3), avec la Kreuzcurve (4);

(*) p, q sont les coordonnées de M, dans le système XOY.

une pareille construction n'est pas simple. On peut même dire que ce procédé est inacceptable, dans un problème dépendant de la géométrie du compas et qui, par conséquent, doit être résolu avec la ligne droite et la circonférence.

C'est alors que l'on peut introduire l'idée des transformations. Ainsi, dans l'exemple traité, posons

$$\frac{q^2}{u^2}=\frac{X}{h},\quad \frac{p^2}{v^2}=\frac{Y}{h'}; \tag{F}$$

h, h' désignant deux paramètres dont nous disposerons tout à l'heure, de façon à produire certaines simplifications. Les équations (3), (4) deviennent

$$\frac{q^2h}{X}+\frac{p^2h'}{Y}=a^2, \tag{3'}$$

$$\frac{X}{h}+\frac{Y}{h'}=1. \tag{4'}$$

Ainsi, grâce à la transformation qui correspond aux formules (F), nous sommes ramenés à trouver l'intersection d'une droite et d'une hyperbole équilatère passant par l'origine.

Un grand nombre de problèmes du second degré, ou de ceux qui s'y rattachent (*problèmes quadratiques*, comme disent, je crois, les Anglais) peuvent être, par la méthode analytique, ramenés à la détermination de l'intersection d'une droite Δ et d'une conique. Or, comme on sait, cette intersection peut être obtenue en remplaçant la conique par un cercle Γ passant par un point arbitraire; l'origine, par exemple.

Mais les développements, exigés par cette méthode, sont d'un ordre qui n'est pas assez élémentaire; il y a intérêt à dégager la solution du problème de ces considérations.

Revenons à la question particulière qui nous occupe. D'après ce que nous avons expliqué, il faut d'abord construire les valeurs X, Y qui vérifient les équations (3'), (4'). Celles-ci donnent, successivement,

$$0=\frac{X^2}{h}+\frac{XY}{h'}-X=\frac{X^2}{h}+\frac{p^2h'X+q^2hY}{a^2h'}-X, \tag{5}$$

$$0=\frac{XY}{h}+\frac{Y^2}{h'}-Y=\frac{p^2h'X+q^2hY}{a^2h}+\frac{Y^2}{h'}-Y. \tag{6}$$

Des relations (5), (6) nous tirons alors

$$X^2+Y^2+\frac{X}{a^2h}(p^2h^2+p^2h'^2-a^2h^2)+\frac{Y}{a^2h'}(q^2h^2+q^2h'^2-a^2h'^2)=0.$$

Cette équation représente la circonférence Γ, à laquelle nous avons fait tout à l'heure allusion, circonférence qui passe par les points cherchés et par l'origine(*). Nous pouvons maintenant disposer des paramètres h, h' de façon à simplifier le tracé de Γ. A cet effet, prenons

$$h = h' = a.$$

Les inconnues auxiliaires X, Y représentent alors les solutions communes aux équations :

$$(\Delta) \qquad X + Y = a,$$

$$(\Gamma) \qquad X^2 + Y^2 + X\left(\frac{2p^2}{a} - a\right) + Y\left(\frac{2q^2}{a} - a\right) = 0(**).$$

A la première correspond une droite AA′, obtenue en prenant OA et $OA' = a$; l'autre, représente une circonférence Γ, construite comme l'indique la figure. On a pris, à cet effet, $OC = OC' = \frac{1}{2}a$. Sur AC, on décrit une demi-circonférence et l'on projette en AG, sur OX, une corde AB de longueur p. Le point H étant déterminé d'une façon analogue, Γ est la circonférence circonscrite au triangle OGH; elle coupe AA′ aux points cherchés.

Après avoir déterminé X, Y, les inconnues principales U, V se construiront facilement au moyen des formules (F).

Permettez-moi une dernière remarque. La discussion, en général, se fait très simplement en suivant la méthode que nous indiquons ici et qui offre l'avantage, au moins dans un grand nombre de cas, de résoudre le problème, non par des formules compliquées, qui ne donnent, pour abou-

---

(*) Au point de vue pratique, il importe de faire passer la circonférence en question par l'origine, parce qu'elle est ainsi déterminée, quand on a trouvé les points où elle coupe les axes, sans qu'il soit nécessaire, ce qui est ordinairement assez long, de construire le rayon.

(**) On peut arriver plus rapidement à ce résultat en observant que les équations (3′), (4′), quand on y fait $h = h' = a$, donnent :

$$q^2Y + p^2X = aXY, \quad X + Y = a;$$

et, par suite,

$$2\frac{q^2}{a}Y + 2\frac{p^2}{a}X = 2XY = a^2 - X^2 - Y^2 = a(X + Y) - X^2 - Y^2.$$

Mais nous avons voulu indiquer la solution générale, celle qui correspond à une circonférence, dans l'équation de laquelle entrent deux paramètres arbitraires.

tir à la solution géométrique, rien de précis, rien de simple, pour mieux dire, mais au moyen d'une construction pouvant être effectuée rapidement. Ainsi dans l'exemple précédent, la réalité des quantités X, Y découle immédiatement de la remarque suivante : *la distance du centre de* Γ *à la droite* Δ *doit être plus petite que le rayon de* Γ.

En appliquant ce problème aux équations (Δ), (Γ) on retrouve le discriminant de l'équation bicarrée, considérée dans la solution indiquée, t. X, p. 126.

Pour que la méthode que nous avons indiquée dans le *Bulletin scientifique*, et que nous venons d'appliquer, comme on l'a vu, soit comprise, il suffit qu'elle s'adresse aux élèves connaissant la représentation cartésienne d'un point et aussi, mais sans autre développement, l'équation de la droite et celle de la circonférence ; c'est-à-dire, peu de chose. Je crois même que cette notion devrait, tant elle est simple et tant elle rencontre d'applications élémentaires, être introduite dans le cours de mathématiques élémentaires ; au moins dans celui qui s'adresse à ceux qui veulent poursuivre leurs études mathématiques.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×7. *A propos d'un problème d'Algèbre, dit le problème de l'héritage*(*). M. Mister nous remet une *cinquième solution* laquelle tient compte de *toutes les conditions* de l'énoncé et n'exige, partant, aucune vérification.

Quand un enfant vient prendre sa part, il prend d'abord une certaine somme puis la $n^{ième}$ partie d'un certain reste, que j'appellerai R_p, et laisse

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) R_p.$$

Quand l'enfant suivant arrive pour prendre la sienne, il prend la même somme augmentée de a et la $n^{ième}$ partie d'un autre reste, R_{p+1}, et il laisse

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) R_{p+1}.$$

(*) Des quatre manières de traiter le problème exposées dans *Mathesis*, p. 111-112, la première est connue ; la seconde est remarquable en ce qu'elle donne deux solutions ; la troisième semble la plus facile ; la quatrième se trouve depuis longtemps dans le *Manuel d'Algèbre* de M. Catalan (Note de M. E. Gelin).

Pour que deux enfants consécutifs quelconques aient la même part, il faut évidemment que les restes R_p et R_{p+1} satisfassent à l'équation

$$\frac{1}{n}R_p - \frac{1}{n}R_{p+1} = a$$

ou

$$R_p - R_{p+1} = na. \tag{1}$$

La différence entre les sommes laissées par deux enfants successifs constitue nécessairement la part d'un enfant; et, d'après ce qui précède, cette part aura pour valeur

$$\frac{n-1}{n}R_p - \frac{n-1}{n}R_{p+1} \quad \text{ou} \quad (n-1)\,a.$$

Le capital C laissé par le père se tire de l'équation

$$a + \frac{C-a}{n} = (n-1)\,a,$$

laquelle donne

$$C = (n-1)^2\,a.$$

Le nombre des enfants s'en déduit.

On aurait pu, d'ailleurs, déterminer le nombre des enfants avant de connaître le capital. Soit x le nombre des enfants. Dans l'équation (1) faisons successivement $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots x-1$; on aura cette suite d'égalités

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} R_1 - R_2 = na, \\ R_2 - R_3 = na, \\ \cdots\cdots\cdots \\ R_{x-1} - R_x = na, \\ R_x = 0; \end{cases}$$

et en les ajoutant membre à membre et réduisant, on obtient

$$R_1 = (x-1)\,na.$$

Si l'on observe que le capital inconnu doit être égal, d'une part, à $R_1 + a$ et, d'autre part, à $(n-1)\,ax$, on aura pour déterminer le nombre x des enfants, l'équation

$$(n-1)\,ax = (x-1)\,na + a;$$

on en tire

$$x = n - 1.$$

Remarque. Si dans l'énoncé, au lieu de dire que le capital est entièrement partagé, on disait qu'il reste b francs pour les pauvres, la dernière des équations (2) devrait être remplacée par

$$\frac{n-1}{n} R_x = b,$$

ou

$$R_x = \frac{n}{n-1} b; \tag{3}$$

il en résulterait, en ajoutant ces équations membre à membre,

$$R_1 = (x-1)\,na + \frac{nb}{n-1};$$

et, pour déterminer le nombre des enfants on aurait l'équation

$$(n-1)\,ax + b = (x-1)\,na + a + \frac{nb}{n-1}, \tag{4}$$

laquelle donnerait

$$x = (n-1) - \frac{b}{a(n-1)}. \tag{5}$$

Pour que le problème soit possible, il faut que x soit entier, ce qui *exige* que b soit nul ou égal à un certain nombre de parts d'enfants.

8. *Propriétés de quadriques homothétiques de même centre* (par A. Mineur, professeur agrégé). Si l'on coupe deux surfaces homothétiques de même centre, par un plan de direction donnée, rencontrant ces surfaces suivant des ellipses, la différence des aires des sections ainsi déterminées reste constante quand le plan se déplace parallèlement à lui-même. — Ce théorème se démontre aisément en rapportant les deux surfaces à un système de diamètres conjugués dont deux sont parallèles au plan donné.

×9. *Addition à la solution de la question* 703 (p. 125). Si dans le 1°, $N = 425$, $N' = 131$, donc N' peut être divisible par 131, sans que N le soit. Dans le 2°, si $N = 394$, $N' = 856 = 8.107$; donc N' peut être divisible par 107, sans que N le soit.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Définition et limite du produit de plusieurs quantités incommensurables.

1. *Définition du produit* $\lambda\mu\nu$ *de plusieurs nombres incommensurables* λ, μ, ν. Pour fixer les idées, nous supposerons λ, μ, ν positifs. 1° Soient l, m, n trois nombres commensurables variables croissants, et L, M, N trois nombres commensurables décroissants, ayant respectivement les nombres λ, μ, ν pour limites. On a donc

$$\lim (L - l) = 0, \quad \lim (M - m) = 0, \quad \lim (N - n) = 0.$$

2° Puisque l'on a

$$l < L, \quad m < M, \quad n < N,$$

on a aussi

$$lmn < LMN.$$

Ensuite, puisque l, m, n sont des quantités croissantes, il en est de même du produit lmn. Donc, d'après le principe fondamental de la théorie des limites(*), lmn a une limite finie ω.

3° Le produit LMN, supérieur à lmn, est décroissant comme chacun de ces facteurs; il a donc une limite finie Ω, d'après le principe fondamental de la théorie des limites.

4° $\Omega = \omega$. Car, soit s'il est possible, c un nombre commensurable compris entre ω et Ω, et tel, par conséquent, que l'on ait

$$lmn < c < LMN.$$

On déduit de là

$$c - lmn < LMN - lmn, \quad LMN - c < LMN - lmn.$$

Or,

$$\begin{aligned} LMN - lmn &= (LMN - lMN) + (lMN - lmN) + (lmN - lmn) \\ &= (L - l)\,MN + (M - m)\,lN + (N - n)\,lm. \end{aligned}$$

Si l'on suppose l, m, n, L, M, N inférieurs à une grandeur fixe P, on a donc

$$LMN - lmn < P^2\,[(L - l) + (M - m) + (N - n)].$$

La somme des quantités $L - l$, $M - m$, $N - n$, dont chacune devient et

---

(*) *Un nombre toujours croissant (ou toujours décroissant) a une limite finie ou infinie* (Voir *Mathesis*, t. V, pp. 193-196). La limite est finie, si la variable reste toujours inférieure, en valeur absolue, à une quantité finie donnée; ici, par exemple, lmn est toujours inférieure à l'une des valeurs de LMN.

reste aussi petite que l'on veut, jouit aussi de cette propriété, et il en est de même de son produit par P^2. Donc

$$LMN - lmn, \quad c - lmn, \quad LMN - c,$$

ont pour limite zéro, ou

$$c = \lim lmn, \quad c = \lim LMN,$$

c'est-à-dire $c = \omega$, $c = \Omega$, ce qui est contraire à l'hypothèse que ω et Ω sont inégaux. On a donc $\Omega = \omega$.

5° Les produits lmN, lMn, Lmn, lMN, LmN, LMn, intermédiaires entre lmn, LMN ont aussi ω pour limite (*).

6° En résumé, les huit produits

$$(l \text{ ou } L) \times (m \text{ ou } M) \times (n \text{ ou } N)$$

ont une limite commune ω. Par conséquent, on peut donner la définition suivante :

Le produit $\lambda\mu\nu$ *des nombres incommensurables* λ, μ, ν *est la limite* ω *du produit des nombres commensurables* l ou L, m ou M, n ou N, *qui ont respectivement* λ, μ, ν *pour limite.*

2. *Le produit* $\lambda\mu\nu$ *est unique.* Soient l', m', n' trois nombres commensurables variables croissants, L', M', N' trois nombres commensurables décroissants ayant aussi respectivement λ, μ, ν, pour limites. On prouve, comme plus haut, que les huit produits

$$(l' \text{ ou } L') \times (m' \text{ ou } M') \times (n' \text{ ou } N')$$

ont une limite commune ω'. Je dis que $\omega' = \omega$. En effet, d'après la définition des nombres l, m, n; l', m', n'; L, M, N; L', M', N', on a

$$l' < L, \quad m' < M, \quad n' < N; \quad l < L', \quad m < M', \quad n < N'.$$

Par suite,

$$l'm'n' < LMN; \quad lmn < L'M'N',$$

et, d'après un principe de la méthode des limites (**),

$$\lim l'm'n' \leqq \lim LMN; \quad \lim lmn \leqq \lim L'M'N',$$

c'est-à-dire,

$$\omega' \leqq \omega, \quad \omega \leqq \omega',$$

relations d'où il résulte que $\omega' = \omega$.

(*) *Si deux quantités variables ont une limite commune, toute quantité intermédiaire a la même limite* (Voir, par exemple, *Mathesis*, VI, pp. 268-269).

(**) *La limite d'une variable toujours supérieure à une autre variable est égale ou supérieure à la limite de celle-ci* (Voir, par exemple, *Mathesis*, t. VI, pp. 269-271).

3. ***Limite du produit*** $(uv \ldots wt)$ ***de variables finies, commensurables ou incommensurables.*** La démonstration de la relation

$$\lim (uv \ldots wt) = \lim u \times \lim v \times \ldots \times \lim w \times \lim t \qquad \text{(B)}$$

donnée précédemment (***Mathesis***, pp. 113-115) s'applique seulement au cas où tous les nombres considérés sont commensurables.

Maintenant que nous avons établi le sens exact que l'on peut attribuer au produit de nombres incommensurables, elle peut être étendue, avec des modifications insignifiantes, au cas où l'une ou plusieurs des quantités $u, v, \ldots w, t, uv \ldots wt, \lim u, \lim v, \ldots, \lim w, \lim t, \lim (uv \ldots wt)$ sont incommensurables. La relation (B) peut donc être régardée comme établie d'une manière générale. (P. M.)

×BIBLIOGRAPHIE.

Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École de Saint Cyr et des élèves de mathématiques élémentaires qui se destinent aux mathématiques spéciales par A. Macé de Lépinay, ancien élève de l'École normale, Professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV. Second fascicule : Notions de géométrie analytique. Paris, Nony, 1891 (page 173-392). Prix des deux fascicules : 4 fr.

Nous avons donné le sommaire du premier fascicule dans le n° de février(*), pp. 40-41. Voici celui du second fascicule, qui est rédigé avec le même soin que le premier.

Ch. IV. *Des Projections.* 1. Segments positifs et segments négatifs. 2. Angles. 3. Projections quelconques. 4. Projections orthogonales. 5. Trois exercices.

Ch. V. *Des Coordonnées.* 1. Coordonnées rectangulaires. Équation de la circonférence, de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole, de la cissoïde de Dioclès, de la strophoïde. 2. Transformation des coordonnées rectangulaires. Conditions pour qu'une équation du second degré représente une circonférence. 3. Classification des lignes planes. 4. Sept exercices.

Ch. VI. *De la ligne droite.* 1. Signification géométrique de l'équation du premier degré à deux variables. Équation de la ligne droite. 2. Diverses formes de l'équation de la ligne droite :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,; \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0\,; \quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\rho\,;$$

$$y-y'=m(x-x')\,; \quad \frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}\,;$$

$$Ax+By+C+\lambda(A'x+B'y+C')=0, \text{ etc.}$$

(*) Les imperfections que nous avons signalées dans ce premier fascicule sont, pour ainsi dire, imposées par le programme, comme nous l'avons appris depuis.

Intersection de deux droites; conditions pour que trois droites soient concourantes, etc. 3. Angles et distances. Séparation du plan en deux régions de signe contraire par une droite. Application : Chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point de coordonnées x et y pour que l'on ait

$$(x+y-2)(x-2y+2)^2(y-2x-2)(x-2)^3<0.$$

4. Systèmes de droites représentés par $f(x)=0$, $f(x,y)=0$, la dernière relation étant supposée homogène. Angle, bissectrice des droites représentées par

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

5. Tangentes et asymptotes. Tangente à la circonférence, aux courbes

$$y=ax^4+bx^3+c,\quad y(x^2+1)=x^3-x;$$

tangente à l'origine à une courbe dont l'équation est de la forme

$$y=x\varphi(x,y).$$

Asymptote de la courbe représentée par

$$(y-2x+1)^2=x^3-4x+3$$

et discussion de cette courbe. 5. Vingt et un exercices.

Ch. VII. *Des courbes du second degré.* 1. Classification des courbes du second degré par la résolution de l'équation, avec des exemples particuliers dans chaque cas principal. Marche à suivre quand les coefficients de l'équation dépendent d'un paramètre variable. Exemple: Chercher, suivant la valeur du paramètre λ, la nature des courbes représentées par l'équation

$$2(\lambda-1)x^2-4xy+\lambda y^2-8x-4y+12=0.$$

2. Réduction de l'équation générale du second degré aux formes simples par transformation des coordonnées. 3. Identité des courbes du second degré avec les courbes usuelles appelées ellipse, hyperbole, parabole. 4. Dix huit exercices, qui en comprennent en réalité quarante six.

L'ouvrage contient 195 figures dessinées avec soin.

Géométrie élémentaire par le P. H. Lacouture, S. J. Troisième édition. Paris, Retaux-Bray, 1891. (XIX-495 p. in-8°, avec nombreuses figures dans le texte). Prix. fr. 5,75.

Essai d'un manuel de géométrie assez élémentaire pour être employé dans les classes d'humanités, assez complet pour servir de base à l'enseignement des classes de mathématiques spéciales des lycées français. Voici le sommaire du livre qui donnera au lecteur une idée de l'arrangement des matières.

Préliminaires. I. *Figures élémentaires.* 1. Angle droit. 2-3. Triangles. 4. Triangles rectangles. 5. Parallèles. 6. Parallélogramme.

II. *Circonférence.* 1. Cordes, arc. 2. Droite et circonférence. 3. Positions relatives de deux circonférences. 4. Mesure des angles. 5. Construction des angles. 6. Construction des tangentes. 7. Construction de triangles et de polygones.

III. *Proportionnalité et similitude.* 1-2. Similitude. 3. Proportionnalité dans le

cercle. 4. Relations métriques dans le triangle. 5. Quadrilatère inscriptible. 6. Construction des formules algébriques, homogénéité, axe radical.

IV. *Polygones réguliers et circonférence.* A. 1. Polygones réguliers 2. Longueur de la circonférence. B. 1. Aire du triangle. 2. des polygones réguliers et du cercle.

V. *La droite et le plan.* 1. Le plan. 2. Parallélisme dans l'espace. 3. Droite et plans perpendiculaires. 4. Projections et perspectives. 5. Angles dièdres. 6. Angles polyèdres.

VI. *Polyèdres.* 1. Prismes. 2. Volume du prisme. 3. Pyramides. 4. Polyèdres (volume, symétrie, similitude, homothétie).

VII. *Surfaces et volumes des corps ronds.* 1. Cylindre et cône. 2. Sphère.

VIII. *Sphère et figures tracées sur la sphère.* 1. Sphère et plan. 2. Circonférences tracées sur la sphère. 3. Polygones sphériques.

IX. *Courbes tracées sur le cône et sur le cylindre.* 1. Ellipse. 2. Hyperbole. 3. Parabole. 4. Sections coniques. 5. Figures tracées sur le cylindre: ellipse et hélice.

Comme on le voit, ce nouveau manuel est fait à peu près sur le modèle des *Éléments de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, mais il leur est inférieur au point de vue du fond et de la forme. La *Géométrie élémentaire* du P. Lacouture n'est pas écrite, en effet, avec la précision qu'on est en droit d'attendre des auteurs venus après Legendre. En plusieurs endroits aussi, la nouvelle Géométrie laisse à désirer au point de vue de la rigueur. Ainsi les définitions relatives aux infiniment petits, aux infiniment grands, aux limites sont inexactes ou incomplètes. On peut aussi trouver à redire à la manière dont l'auteur parle du postulat de la parallèle unique.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 412.

(Voir *Mathesis*, (1), V, p. 23, (2), I, p. 29.)

Démontrer l'identité suivante :

$$\frac{m^p}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots p)} = \mathrm{S}\frac{1}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots\beta)\ldots(1.2.3\ldots\lambda).2^{\gamma}(2.3)^{\delta}\ldots(2.3\ldots p)^{\lambda}}$$

le signe S *portant sur toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des quantités* $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ *qui vérifient les deux équations simultanées*

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda=m, \quad \beta+2\gamma+\cdots+p\lambda=p. \quad \text{(Weill.)}$$

Solution par M. G. Teixeira (directeur de l'École polytechnique de Porto). Le *Calcul différentiel* donne une démonstration de cette relation.

Partons de l'identité, qui est démontrée dans mon *Curso de Analyse*, t. I (*) (page 212 de la deuxième édition).

$$\Sigma \frac{p\,!}{\beta\,!\,\gamma\,!\,\ldots\,\lambda\,!\,(2\,!)^{\gamma}\ldots\,(p\,!)^{\lambda}} = \frac{1}{(m-\alpha)\,!}\left(\frac{d^p(e^x-1)^{m-\alpha}}{dx^p}\right)_0$$

où Σ représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières, positives ou nulles, des équations

$$\beta + 2\gamma + \cdots + p\lambda = p, \quad \beta + \gamma + \cdots \lambda = m - \alpha.$$

Cette identité donne

$$\Sigma \frac{1}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\ldots\,\lambda\,!\,(2\,!)^{\gamma}\ldots\,(p\,!)^{\lambda}} = \frac{1}{\alpha\,!\,(m-\alpha)!\,p\,!}\left(\frac{d^p(e^x-1)^{m-\alpha}}{dx^p}\right)_0.$$

Si l'on donne maintenant à α les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m$ et si l'on fait l'addition des égalités résultantes, membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} S\frac{1}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\ldots\,\lambda\,!\,(2\,!)^{\beta}\ldots\,(p\,!)^{\lambda}} &= \frac{1}{p\,!}\Sigma\left[\frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{1}{\alpha\,!\,(m-\alpha)!}(e^x-1)^{m-\alpha}\right)\right]_0 \\ &= \frac{1}{p\,!}\left[\frac{d^p}{dx^p}\Sigma\frac{(e^x-1)^{m-\alpha}}{\alpha\,!\,(m-\alpha)\,!}\right]_0 = \frac{1}{p\,!\,m\,!}\left[\frac{d^p}{dx^p}(e^x-1+1)^m\right]_0 \\ &= \frac{1}{p\,!\,m\,!}\left(\frac{d^p e^{mx}}{dx^p}\right)_0 = \frac{m^p}{m\,!\,p\,!}. \end{aligned}$$

Note. Sur la formule qui sert de point de départ à M. Teixeira, ou plutôt sur une formule plus générale d'où l'on peut la déduire, voir *Mathesis*, 1881, (1), I, pp. 23-25. (P. M.)

Question 416.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 46.)

Soient O, O_1 *deux circonférences qui se coupent en un point* A. *Trouver les lieux des centres, des foyers et l'enveloppe des axes des coniques osculatrices au cercle* O *en* A *et tangentes au cercle* O_1. (Dewulf.)

Solution par M. Déprez. Prenons pour axes des coordonnées la tangente et la normale au cercle O en A_1; les équations des deux cercles seront

$$x^2 + y^2 - dy = 0, \quad x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

(*) L'un des meilleurs cours de calcul différentiel publiés récemment. La première édition a paru en 1887, la seconde en 1890. L'auteur écrit $\beta\,!$ pour $1.2.3\ldots\beta$. (P. M.)

Une conique osculatrice au cercle O en A a pour équation

$$x^2 + y^2 - dy - my(y - nx) = 0,$$

car les cordes communes sont AX et une droite passant par A ; nous remplaçons cette équation par

$$y^2 + \lambda yx + \mu x^2 - \mu dy = 0, \qquad (1)$$

λ et μ étant deux paramètres indéterminés.

Les coordonnées des points d'intersection de la conique avec le cercle O, vérifient l'équation suivante qui est une combinaison des équations de ces courbes :

$$(y^2 + \lambda xy + \mu x^2)(ax + by) - (x^2 + y^2)\mu dy = 0.$$

Divisant l'égalité (2) par x^3 et posant $\frac{y}{x} = K$, on obtient l'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection de la conique avec le cercle O, :

$$(b - \mu d)K^3 + (a + b\lambda)K^2 + (a\lambda + b\mu - d\mu)K + a\mu = 0. \qquad (2)$$

Pour qu'il y ait contact, deux racines doivent être égales. Représentons l'équation (2) par $AK^3 + BK^2 + CK + D = 0$; on sait que la condition d'égalité de deux racines est

$$(9AD - BC)^2 - 4(B^2 - 3AC)(C^2 - 3BD) = 0. \qquad (3)$$

Nous supposons qu'on y remplace A, B, C, D par les coefficients de l'équation (2).

Cela posé, les coordonnées du centre de la conique osculatrice vérifient les équations $\lambda y + 2\mu x = 0$, $2y + \lambda x - d\mu = 0$; d'où l'on tire

$$\mu = \frac{2y^2}{2x^2 + dy}, \quad \lambda = -\frac{4xy}{2x^2 + dy}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3), nous aurons l'équation du lieu du centre.

Si l'on représente l'équation (1) par $f(x, y) = 0$, les coordonnées (x, y) du foyer de la conique osculatrice vérifient les équations

$$2\lambda f(x, y) = f'_x f'_y, \quad f'^2_x - f'^2_y = 4(\mu - 1)f(x, y),$$

desquelles on peut tirer λ, μ pour substituer les valeurs dans l'égalité (3). On aura ainsi l'équation du lieu du foyer.

Un axe de la conique a une équation de la forme $f'_x + pf'_y = 0$; son

coefficient angulaire $-\dfrac{2\mu+p\lambda}{\lambda+2p}$ doit vérifier l'équation

$$Bu^2+2(A-C)u-B=0,$$

où $A=\mu$, $B=\lambda$, $C=1$. Représentons l'équation de l'axe par $\alpha x+\beta y+1=0$; il sera facile de former, au moyen des valeurs de α et β et de la condition (3), une relation constante entre α et β; ce sera l'équation de l'enveloppe de l'axe en coordonnées tangentielles.

×Question 704 et 708.

(Voir *Mathesis*, (2) I, pp. 50 et 80.)

704. *Dans tout triangle* ABC

$$(a\operatorname{tg}B-2r)(b\operatorname{tg}C-2r)(c\operatorname{tg}A-2r)=$$
$$(a\operatorname{tg}C-2r)(b\operatorname{tg}A-2r)(c\operatorname{tg}B.-2r),$$

r étant le rayon du cercle inscrit. (Mandart.)

708. $$(a\operatorname{tg}B-2\gamma)(b\operatorname{tg}C-2\alpha)(c\operatorname{tg}A-2\beta)=$$
$$-(a\operatorname{tg}C-2\beta)(b\operatorname{tg}A-2\gamma)(c\operatorname{tg}B-2\alpha).$$

α, β, γ étant les rayons des cercles exinscrits. (E. Gelin.)

Solution par MM. Delahaye (à Roye, Somme) et Emmerich (Mulheim).
Au moyen des formules

$$a=2R\sin A,\quad r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

on trouve

$$a\operatorname{tg}B-2r=\frac{8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos B}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos B\sin\frac{C}{2}\right).$$

La parenthèse peut se transformer ainsi :

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B}{2}-\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$
$$=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

de sorte que

$$a\operatorname{tg}B-2r=\frac{8R\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos B}.$$

On en conclut aisément que les deux membres de l'égalité de la question 704 ont pour valeur commune

$$\frac{8^3R^3\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{\cos A\cos B\cos C}.$$

De même pour la question 708,

$$a\operatorname{tg}B-2\gamma=\frac{8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos B}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-\cos B\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=\frac{8R\cos\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos B},\quad \text{etc.}$$

Solution par M. François (la Haye).

$$a\operatorname{tg}B-2r=a\operatorname{tg}B-2(p-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=a(\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B)+(b-c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}{\cos B}[a+(b-c)\cos B]=\frac{b\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}{\cos B}(\cos C+\cos B).$$

On voit facilement qu'en portant cette valeur et les valeurs analogues dans l'égalité proposée, on trouve la même expression pour les deux membres.

Pour démontrer la relation de la question 708, observons que

$$a\operatorname{tg}B-2\gamma=a\operatorname{tg}B-\frac{2S}{p-c}=a\operatorname{tg}B-\frac{ac\sin B}{p-c}$$
$$=\frac{a\operatorname{tg}B}{p-c}(p-2c\cos^2\tfrac{1}{2}B),\text{ etc.}$$

Solution par MM. Decamps et Russo. Des égalités

$$\sin A=\frac{2S}{bc},\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

on déduit

$$\operatorname{tg}A=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2};$$

donc

$$a\operatorname{tg}B-2r=\frac{4aS}{a^2+c^2-b^2}-2r=\frac{4arp}{a^2+c^2-b^2}-2r=2r(b+c)\frac{a+b-c}{a^2+c^2-b^2},$$

d'où la question 704.

De même,

$$a \operatorname{tg} B - 2\gamma = \frac{4aS}{a^2+c^2-b^2} - 2\gamma = \frac{4a(p-c)\gamma}{a^2+c^2-b^2} - 2\gamma$$

$$= 2\gamma(b-c)\frac{a+b+c}{a^2+c^2-b^2}, \text{ etc.}$$

M. MANDART a donné, de la question 708, une solution peu différente de celle qui précède; il signale aussi la relation :

$$(a \operatorname{tg} B + 2\alpha)(b \operatorname{tg} C + 2\beta)(c \operatorname{tg} A + 2\gamma) = (a \operatorname{tg} C + 2\alpha)(b \operatorname{tg} A + 2\beta)(c \operatorname{tg} B + 2\gamma), \quad (A)$$

comme traduction algébrique du théorème suivant : *Si, sur les médiatrices* A'O, B'O, C'O, *d'un triangle* ABC *on porte respectivement à partir des milieux* A', B', C' *des côtés et à l'extérieur, des longueurs* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *égales à* α, β, γ, *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent au point de Gergonne du triangle.*

M. SOLLERTINSKY a donné de bonnes solutions des mêmes questions; il démontre aussi, très simplement, l'égalité (A) et les suivantes :

$$(a \operatorname{tg} B - 2\beta)(b \operatorname{tg} C - 2\gamma)(c \operatorname{tg} A - 2\alpha) = -(a \operatorname{tg} C - 2\gamma)(b \operatorname{tg} A - 2\alpha)(c \operatorname{tg} B - 2\beta),$$

$$\frac{(a \operatorname{tg} B - 2r)(b \operatorname{tg} C - 2r)(c \operatorname{tg} A - 2r)}{(a \operatorname{tg} C + 2\alpha)(b \operatorname{tg} A + 2\beta)(c \operatorname{tg} B + 2\gamma)} = \frac{r^3}{\alpha\beta\gamma}.$$

Solution par M. LEMOINE. 1° On a

$$a \operatorname{tg} B - 2r = \frac{ac \sin B}{c \cos B} - 2r = \frac{2pr}{c \cos B} - 2r$$

$$= \frac{2r}{c \cos B}(p - c \cos B) = \frac{r}{c \cos B}(a + b + c - 2c \cos B)$$

$$= \frac{r}{c \cos B}\left(b + c + \frac{b^2 - c^2}{a}\right) = \frac{2r(b+c)(p-c)}{ac \cos B}.$$

De là, on déduit facilement que les deux membres de l'égalité à établir ont pour valeur commune

$$\frac{r^2(b+c)(c+a)(a+b)}{2pR^2 \cos A \cos B \cos C} = \frac{4r^3(p^2 + 2Rr + r^2)}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

On démontrerait de même la formule

$$(2\alpha + a \operatorname{tg} B)(2\alpha - b \operatorname{tg} C)(2\alpha - c \operatorname{tg} A)$$
$$= (2\alpha + a \operatorname{tg} C)(2\alpha - b \operatorname{tg} A)(2\alpha - c \operatorname{tg} B)$$

et les deux autres analogues.

2° On trouve aisément

$$a \operatorname{tg} B - 2\gamma = \frac{ac \sin B}{c \cos B} - 2\gamma = \frac{2(p-c)\gamma}{c \cos B} - 2\gamma$$

$$= \frac{2\gamma}{c \cos B}(p - c - c \cos B) = \frac{\gamma}{c \cos B}(a + b - c - 2c \cos B)$$

$$= \frac{\gamma}{c \cos B}\left(b - c + \frac{b^2 - c^2}{a}\right) = \frac{2p\gamma(b-c)}{ac \cos B}.$$

On en conclut que les deux membres de l'égalité à démontrer ont pour valeur commune

$$\frac{2p^3(b-c)(c-a)(a-b)}{2R^2 r \cos A \cos B \cos C} = \frac{2p^3(b-c)(c-a)(a-b)}{r[p^2 - (2R + r)^2]}.$$

On démontrerait d'une façon semblable la formule

$$(a \operatorname{tg} B - 2\beta)(b \operatorname{tg} C - 2r)(c \operatorname{tg} A + 2\gamma)$$
$$= -(a \operatorname{tg} C - 2\gamma)(b \operatorname{tg} A + 2\beta)(c \operatorname{tg} B - 2r)$$

et les deux formules analogues.

×Question 705.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 50.)

On considère tous les triangles sphériques ABC, ***inscrits à un même petit cercle, ayant un sommet fixe*** A ***et dans lesquels la somme cos*** AB + ***cos*** AC ***a une valeur constante. Démontrer :*** 1° ***que le point de rencontre des médianes décrit un grand cercle ;*** 2° ***que la base*** BC ***enveloppe une ellipse sphérique.*** (Déprez.)

Solution par M. B. Sollertinsky. 1° En désignant les cordes AC, AB par b, c et le rayon de la sphère S par R, on a

$$\cos AB + \cos AC = 2 - 2\left(\sin^2 \frac{AB}{2} + \sin^2 \frac{AC}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2R^2}\left(b^2 + c^2\right);$$

donc la somme $(b^2 + c^2)$ est constante.

Soient M le milieu de la corde BC ; N le point de rencontre de la droite AM avec le cercle ABC. On a

$$b^2 + c^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2);$$

mais

$$AM(AN - AM) = \overline{BM}^2,$$

d'où

$$AM.AN = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} = \text{const.}$$

Les points M, N sont donc inverses par rapport au centre A. Par suite, le lieu du point M et celui du centre de gravité G du triangle plan ABC sont deux droites Δ, Δ′ perpendiculaires au diamètre AOA′ du cercle ABC(*). Mais les points de rencontre des médianes du triangle sphérique ABC étant les extrémités du diamètre SG de la sphère, le lieu de ces points est le grand cercle passant par Δ′.

2° Le point M′ où le rayon SM rencontre l'arc BC est la projection du pôle P du cercle ABC sur cet arc. Le lieu de ces projections est donc un grand cercle D passant par Δ. Soient p, p' les symétriques sphériques de P par rapport à deux positions de l'arc BC; t l'un des points d'intersection de ces deux arcs. Il est facile de voir que tous les points p sont sur un petit cercle d, parallèle à D(P, d sont équidistants de D). Puisque le triangle sphérique ptp' est toujours isoscèle, le point de contact T, de l'arc BC avec son enveloppe, est sur le grand cercle perpendiculaire à celui qui est tangent, en p, au cercle d.

Désignons par Q celui des deux pôles du cercle D qui se trouve dans le même hémisphère que le point P; Q est aussi le pôle de d. On a donc

$$Qp = QT + Tp = QT + TP = \text{const.}$$

Ainsi, l'arc BC enveloppe une ellipse sphérique (ou à vrai dire deux ellipses) ayant P, Q (ou les points P′,Q′, diamétralement opposés) pour foyers. La somme fixe des rayons vecteurs est égale à

$$R\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right),$$

δ étant l'angle du rayon SP et du plan D.

×Question 709.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 80.)

Si

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,$$

on a également

$$\Sigma\frac{a^2-bc}{b+c}\Sigma\frac{b+c}{a^2-bc}=\frac{3}{abc}\Sigma a^3. \qquad \text{(Leudesdorf.)}$$

(*) La corde AÇ enveloppe une parabole ayant le centre O du cercle ABC pour foyer et la droite Δ pour tangente au sommet.

Solution par Mlle DE HAAS (Rotterdam), *et* MM. EMMERICH, DÉPREZ, DECAMPS *et* MANDART. De la relation donnée, on déduit

$$bc + ca + ab = 0; \quad \text{d'où} \quad bc = -a(b+c).$$

Par conséquent :

$$\frac{a^2 - bc}{b+c} = \frac{a^2 + a(b+c)}{(-bc : a)} = -\frac{a^2(a+b+c)}{bc}, \quad \frac{b+c}{a^2 - bc} = \frac{b+c}{a(a+b+c)},$$

$$\mathbf{S}\frac{a^2-bc}{b+c}\mathbf{S}\frac{b+c}{a} = -\mathbf{S}\frac{a^2}{bc}\mathbf{S}\frac{b+c}{a} = -\frac{1}{abc}\mathbf{S}a^3\mathbf{S}a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{3}{abc}\mathbf{S}a^3.$$

Autre solution par M. A. DENYS.

QUESTIONS D'EXAMEN.

494. Trouver la somme

$$\left(r+\frac{1}{r}\right)^2 + \left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2 + \left(r^3+\frac{1}{r^3}\right)^2 + \cdots + \left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)^2$$

(*Baccalauréat*, Bordeaux, 1890.)

495. Résoudre l'équation $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$.

Réponse :

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = 2k\pi, \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{5}.$$

496. Démontrer que deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont 1° l'hypoténuse et un côté proportionnels; 2° l'hypoténuse et la hauteur correspondante proportionnelles.

La démonstration suivante est un bon exercice sur les proportions :

1° Par hypothèse,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'};$$

d'où successivement

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a'^2 - b'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{c^2}{c'^2} = \frac{b^2}{b'^2} \cdots$$

2° Par hypothèse

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a^2}{a'^2} = \frac{ah}{ah''} = \frac{bc}{b'c'}, \quad \frac{b^2+c^2}{b'^2+c'^2} = \frac{bc}{b'c'},$$

$$\frac{b^2+c^2+2bc}{b'^2+c'^2+2b'c'} = \frac{b^2+c^2-2bc}{b'^2+c'^2-2b'c'}, \quad \frac{b+c}{b'+c'} = \frac{b-c}{b'-c'}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

(CH. THIRY.)

497. Étant donnés deux cercles égaux, on mène deux rayons parallèles, AA′ et BB′, du même côté de la ligne des centres AB. Sur A′B′ comme diamètre, on décrit une circonférence C. Calculer le rayon x d'une circonférence qui touche les trois circonférences A, B, C.

Soient $AA' = r$, $AB = 2d$, *angle* $A'AB = \alpha$. Le centre X de la circonférence cherchée se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu D de AB. Le triangle XCD donne

$$(d-x)^2 = r^2 + (r+x)^2 - d^2 - 2r\sin\alpha\sqrt{(r+x)^2 - d^2}, \text{ etc.} \quad \text{(G. Russo.)}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**725**. Au triangle ABC, on circonscrit un autre triangle A′B′C′. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les projections d'un point S sur les côtés des triangles ABC, A′B′C′. 1° Les trois cercles $\alpha\beta'\gamma'$, $\beta\gamma'\alpha'$, $\gamma\alpha'\beta'$ concourent en un même point I. 2° Une circonférence quelconque Δ passant par S, I rencontre les premières circonférences aux points $\alpha'', \beta'', \gamma''$; soit S′ le point de Δ diamétralement opposé à S. Les droites $S'\alpha''$, $S'\beta''$, $S'\gamma''$ rencontrent les côtés correspondants de ABC en trois points situés sur une droite passant par S. (Sollertinsky.)

×**726**. Vérifier l'identité

$$3^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 3^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 3^{n-2} - \cdots \mp 1$$

$$= 4^n - \frac{n}{1} C_{n+1,n}\, 4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} C_{n+2,n}\, 4^{n-2} - \cdots \mp C_{2n,n}. \quad \text{(E. Catalan.)}$$

×**727**. Soient A′B′C′, A″B″C″ deux triangles inscrits au triangle ABC et homologiques avec ce dernier. Soient A‴, B‴, C‴ les intersections des côtés homologues des triangles A′B′C′, A″B″C″. Démontrer que le triangle A‴B‴C‴ est homologique avec chacun des triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″. (Lachlan.)

728. Trouver dans le plan d'un triangle ABC un point P tel que les puissances des points A, B, C par rapport aux cercles BCP, CAP, ABP soient proportionnelles à trois quantités données α, β, γ.

Rectifications. — Page 109, dernière ligne, lire $(1+K)^2$ au lieu de $(1+K)$; ligne 14 en remontant $a^n + b^n + c^n$, au lieu de $a^2 + b^2 + c^2$. Page 124, question 202. La courbe ayant pour équation $y = 2e^{-x}$ est le lieu des centres de courbure de la parabole en son point de contact avec l'axe des x.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE TRIANGLES;

par M. H. Brocard.

Au congrès de l'Association britannique pour l'avancement des sciences, tenu à Cheltenham en 1856, J. Booth a présenté un mémoire sur la Trigonométrie de la Parabole et sur l'origine géométrique des logarithmes.

Ce travail, qui a valu une juste célébrité à son auteur, renferme un tableau comparatif des formules fondamentales des trigonométries du cercle et de la parabole.

M. le professeur S. Günther a repris et complété l'étude de J. Booth et en a publié les résultats en 1882 dans un ouvrage traitant des logarithmes paraboliques et de la trigonométrie parabolique. Celle-ci est la trigonométrie basée sur la parabole et sur la strophoïde droite, de même que les autres trigonométries planes sont basées sur le cercle et sur l'hyperbole équilatère. C'est pourquoi J. Booth, qui avait fait une étude approfondie de la strophoïde, proposa de lui donner le nom de logocyclique, rappelant ainsi à la fois les relations de cette courbe avec la logarithmique et avec le cercle (voir N. A. M. (1) XX, 1861, p. 82-83, suppl. note de B. Tortolini).

Chacune de ces trigonométries possède des formules de transformation qui offrent de remarquables analogies, et dans l'ouvrage précité, M. Günther a eu l'ingénieuse idée d'établir ce rapprochement dans un tableau synoptique, imité de celui de J. Booth, avec l'adjonction des formules de la trigonométrie hyperbolique (voir aussi *Mathesis*, t. III, p. 134).

Après la trigonométrie du cercle, sur laquelle tout paraît avoir été dit, celle qui a fait le plus de progrès est la trigonométrie de l'hyperbole équilatère, grâce aux travaux importants dont elle a été l'objet de la part de plusieurs géomètres presque tous contemporains. Nous croyons que l'étude de la trigonométrie de la parabole fournirait pareillement matière à d'intéressantes recherches; car il serait à désirer, par exemple, que l'interprétation géométrique des formules y fût aussi développée que dans la trigonométrie du cercle, et il ne nous semble pas que ce résultat ait été obtenu pour certaines expressions qui se rencontrent dans quelques-unes de ces formules.

Il est remarquable que plusieurs de ces expressions interviennent très naturellement dans l'étude d'un problème très simple de géométrie, indépendant des propriétés de la parabole.

Le présent article a pour objet de signaler ce problème à la curiosité des géomètres, afin de les engager à chercher d'autres questions semblables, dont l'étude pourra les conduire à de nouveaux résultats relatifs à la trigonométrie parabolique.

*

Le problème que nous avons rencontré est le suivant : ***Trouver le lieu des centres de gravité des triangles ayant un angle constant et même cercle inscrit (ou ex-inscrit).***

Cherchons, d'abord, le lieu géométrique des milieux des bases de ces triangles opposées à l'angle constant donné.

En rapportant ces triangles à deux diamètres rectangulaires du cercle dont l'un passe par le sommet fixe, on adopte, croyons-nous, le système d'axes le plus simple.

Les trois tangentes qui représentent les côtés du triangle ont alors même forme d'équation.

Si l'on désigne par a le rayon du cercle et par m le coefficient d'inclinaison, une tangente a pour équation

$$y = mx + a\sqrt{1 + m^2}$$

ou

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + a \operatorname{séc} \varphi. \qquad (1)$$

On reconnaît déjà le type d'équations qui se rencontrent dans l'étude de la logocyclique. On a, en effet (*loc. cit.*, p. 36, ou *Mathesis*, t. I, p. 81) la relation

$$r = a(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{séc} \varphi). \qquad (2)$$

Or, $a(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{sec} \varphi)$ est l'ordonnée du point de la droite AB dont l'abscisse est a, c'est-à-dire GL. Si donc on mène OM parallèle à AB et égale à GL, le lieu des points M sera une strophoïde droite (ou logocyclique) ayant O pour sommet et G pour point double ; cette courbe est donc représentée par l'équation (2), O étant le pôle et OG l'axe polaire. On peut aussi remarquer que B'L = OM, MN = NG.

On peut encore mener GL' parallèle à AL et égale à GL. Le lieu des points L' est la même strophoïde transportée de O en G.

Les coordonnées des points B, C d'intersection des tangentes fixes

AB (+ φ), AC (— φ), avec la tangente variable BC (θ) résultent des équations de ces lignes :

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + a \operatorname{séc} \varphi, \tag{3}$$

$$y = - x \operatorname{tg} \varphi - a \operatorname{séc} \varphi, \tag{4}$$

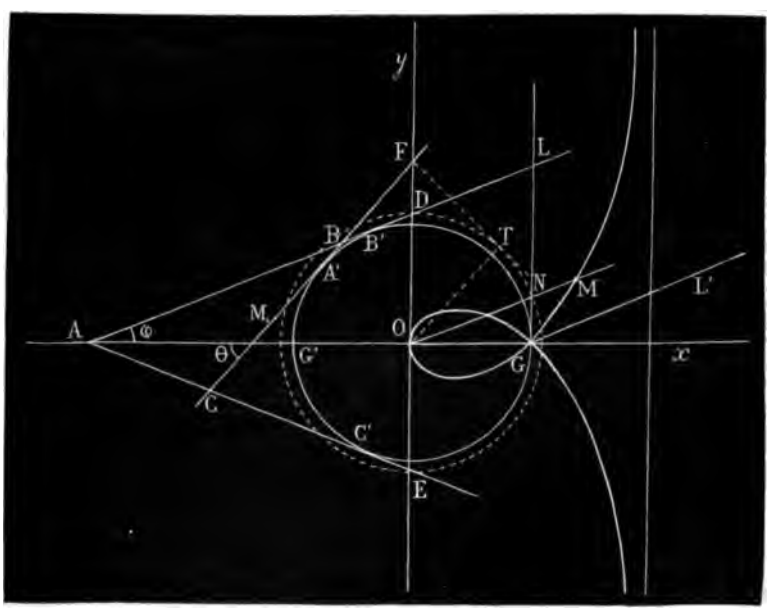
$$y = x \operatorname{tg} \theta + a \operatorname{séc} \theta. \tag{5}$$

La résolution des équations (3) et (5) donne

$$x_B = a \frac{\operatorname{séc} \theta - \operatorname{séc} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}, \tag{6}$$

$$y_B = a \frac{\operatorname{séc} \theta \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{séc} \varphi \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}, \tag{7}$$

et pour obtenir x_C et y_C, il suffirait de changer le signe de tg φ et de séc φ dans les formules (6) et (7).



On en conclut, pour les coordonnées du milieu M_1 de BC :

$$x_{M_1} = a \frac{\operatorname{séc} \theta \operatorname{tg} \theta - \operatorname{séc} \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta}, \tag{8}$$

$$y_{M_1} = a \operatorname{tg} \varphi \frac{\operatorname{séc} \theta \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta \operatorname{séc} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta}. \tag{9}$$

L'élimination de θ entre ces deux équations ne présente guère de difficulté si on la cherche directement. Mais on peut y arriver aisément en observant que le lieu (M_1) est évidemment symétrique par rapport à AO et qu'il admet des branches infinies parallèles à AB et à AC, et que sur chaque rayon vecteur, issu de A, il existe seulement deux points de la courbe (M_1). D'autre part, celle-ci est tangente en G et en G' à la circonférence; on est donc amené à penser que le lieu (M_1) est une hyperbole ayant pour centre O et des asymptotes parallèles à AB et AC, et, par suite, ayant pour équation

$$x^2 - y^2 \cot^2 \varphi = a^2. \tag{10}$$

Or, cette supposition se trouve vérifiée, car en formant l'expression $x^2 - y^2 \cot^2 \varphi$, l'on trouve

$$x^2 - y^2 \cot^2 \varphi = a^2 \frac{\sec^2 \varphi - \sec^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta}, \tag{11}$$

et si on observe que l'on a identiquement

$$\sec^2 \varphi - \sec^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta, \tag{12}$$

ou

$$\sec^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1, \tag{13}$$

on voit que l'équation (10) est bien le résultat de l'élimination, et que le lieu des points (M_1) est l'hyperbole définie plus haut.

Par analogie, le lieu des centres de gravité des triangles ABC est évidemment une autre hyperbole semblable à la précédente, le centre de similitude étant le point A, et le rapport de similitude, $\frac{2}{3}$.

*

Dans la monographie dont il a été question plus haut, M. S. Günther, reproduisant les formules de la trigonométrie parabolique de J. Booth, indique entre autres les suivantes :

$$\operatorname{tg}(\varphi \mp \theta) = \operatorname{tg} \varphi \sec \theta \pm \operatorname{tg} \theta \sec \varphi,$$
$$\operatorname{tg}(\varphi \perp \varphi) = 2 \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi,$$
$$\sec(\varphi \perp \varphi) = 2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = 2 \sec^2 \varphi - 1,$$
$$\operatorname{tg}(\varphi \perp \theta) \operatorname{tg}(\varphi \top \theta) = \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Nous avons un peu modifié les notations pour la facilité typographique

et donné la préférence aux notations d'un autre ouvrage du même auteur sur les fonctions hyperboliques (1881, p. 201; voir *Mathesis*, t. IV, p. 169). Ces notations sont d'ailleurs celles de J. Booth (*A Memoir on the Trigonometry of the Parabola*, 1856).

Les signes $\perp$, $\top$ représentent, dans la pensée de ce géomètre, une certaine ressemblance avec les signes $+$ et $-$ de l'algèbre ordinaire. Booth les désigne en effet par « *logarithmic plus and minus*, » et il suffit de les échanger mutuellement dans les formules des deux autres trigonométries, moyennant les changements correspondants et habituels des symboles sin, cos, tg, Sh, Ch, Th.

Nous retrouvons, dans ces formules, une partie des expressions précédentes, qui reçoivent ainsi une interprétation géométrique assez simple.

Par exemple, la formule (9) peut s'écrire

$$y_{M_1} = \eta = a \operatorname{tg}\varphi \frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{séc}\theta - \operatorname{tg}\theta \operatorname{séc}\varphi}{\operatorname{séc}^2\varphi - \operatorname{séc}^2\theta} = \frac{a \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(\varphi \perp \theta)}$$

et l'on en déduit

$$\operatorname{tg}(\varphi \perp \theta) = \frac{a \operatorname{tg}\varphi}{\eta}.$$

D'ailleurs, si on observe que les côtés AB, AC, BC rencontrent Oy en des points D, E, F, dont les distances à l'origine ont pour expressions séc φ, $-$ séc φ, et séc θ, il suffira de mener par le point F une tangente FT au cercle dont O est le centre et OD ou OE le rayon pour avoir

$$\overline{FT}^2 = FE.FD = (\operatorname{séc}\varphi + \operatorname{séc}\theta)(\operatorname{séc}\varphi - \operatorname{séc}\theta) = \operatorname{séc}^2\varphi - \operatorname{séc}^2\theta,$$

ou encore

$$\overline{FT}^2 = \overline{FO}^2 - \overline{OT}^2 = \operatorname{séc}^2\varphi - \operatorname{séc}^2\theta.$$

On remarquera aussi l'analogie des formules (13) avec les formules de la trigonométrie du cercle

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

et avec celles de la trigonométrie de l'hyperbole équilatère

$$\operatorname{Ch}^2 u - \operatorname{Sh}^2 u = \operatorname{Ch}^2 v - \operatorname{Sh}^2 v = 1.$$

2 juin 1888.

NOTE. 1. Voici l'origine des singulières notations de J. Booth. Dans le cas où le module est 1, les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{tn} u$ jouissent des propriétés suivantes :

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} v}{1 + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}, \quad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}, \quad \operatorname{tn}(u+v) = \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{cn} v} + \frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{cn} u}.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{am} u = \varphi, \quad \operatorname{am} v = \psi, \quad \operatorname{am}(u+v) = \chi$$

on a

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{1 + \sin\varphi\sin\psi},$$

$$\operatorname{séc}\chi = \operatorname{séc}\varphi\operatorname{séc}\psi + \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi, \quad \operatorname{tang}\chi = \operatorname{tang}\varphi\operatorname{séc}\psi + \operatorname{tang}\psi\operatorname{séc}\varphi$$

J. Booth a écrit, dans ces formules, $\varphi \perp \psi$, *au lieu de* χ.

2. Ces formules deviennent celles de la théorie des fonctions hyperboliques, si l'on pose :

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{Th} U, \quad \operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{Ch} V}, \quad \operatorname{tn} u = \operatorname{Sh} V,$$

$$\operatorname{sn} v = \operatorname{Th} V, \quad \operatorname{cn} v = \frac{1}{\operatorname{Ch} V}, \quad \operatorname{tn} v = \operatorname{Sh} V,$$

$$\operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{Th} W, \quad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{1}{\operatorname{Ch} W}, \quad \operatorname{tn}(u+v) = \operatorname{Sh} W.$$

Alors, en effet, on trouve

$$\operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{Th}(U+V), \quad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{1}{\operatorname{Ch}(U+V)}, \quad \operatorname{tn}(u+v) = \operatorname{Sh}(U+V),$$

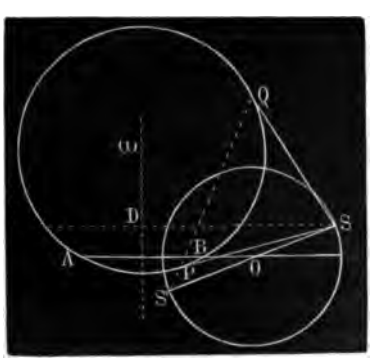
et, par suite $W = U + V$. (P. M.)

×SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

par M. SOLLERTINSKY (Gatschina, Russie).

Par deux points donnés A, B ***faire passer une circonférence*** ω ***qui soit vue d'un point donné*** S ***sous un angle donné*** α.

Soient SP, SQ les tangentes menées de S à la circonférence ω. La polaire PQ de S passe par un point fixe S', quelle que soit la circonférence décrite par A et B. Pour démontrer cette propriété, bien connue, cherchons les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle S dans le triangle SAB et prenons la distance de ces points pour diamètre d'une circonférence O (circonférence d'Apollonius du triangle SAB). Celle-ci coupe orthogonalement toute circonférence passant par A et B; son diamètre SS' est donc divisé harmoniquement par un cercle quelconque passant par A et B, et S' appartient à la polaire de S par rapport au second cercle.



La perpendiculaire élevée au milieu de AB rencontre une parallèle menée par S à AB en un point D, situé sur la circonférence ωPSQ. Donc

$$SDQ = SPQ = SQP = \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha).$$

Il résulte de là que le point Q est à l'intersection de la circonférence du segment capable de l'angle $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ construit sur SS′, avec une droite DQ qui fait avec SD le même angle $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$.

La droite DQ coupe la circonférence du segment capable en deux points Q, Q′, de sorte que le problème admet deux solutions.

Remarque. Appelons ω, ω′ les deux cercles qui passent par A et B, et sont vus de S sous le même angle. Les polaires PQ, P′Q′ de S par rapport à ces cercles se coupent au point S′ ; les cordes PP′, QQ′ se coupent au point D.

Les cercles ω, ω′ sont des figures inverses (isogonales) par rapport au triangle ABS. En effet, si l'on transforme par inversion triangulaire le cercle ω, on obtient un cercle passant également par A et B, et dont les tangentes issues de S sont les symétriques des droites SP, SQ par rapport à la bissectrice de l'angle ASB ; donc le nouveau cercle résout le problème proposé et, par suite, se confond avec le cercle ω′.

Les tangentes en A à ces cercles étant symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAS, les rayons Aω, Aω′ le sont également ; on en déduit que les centres ω, ω′ sont des points inverses par rapport au triangle SAB(*).

(*) Pour passer du cercle ω au cercle ω′, on peut transformer le premier par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant en S et la puissance égale à SA. SB; on prend ensuite la figure symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle ASB. M. Gob a employé avec succès cette méthode dans plusieurs recherches (Association française etc., Congrès de Limoges, 1891. Voir aussi J. M. E., 1891, pp. 114-127). On a

$$\omega Q = \omega S \sin\alpha, \quad \text{d'où} \quad \omega A : \omega S = \sin\alpha ;$$

le point ω se trouve donc sur la circonférence, lieu des points dont les distances aux points A, S ont un rapport donné. (J. N.)

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

×FORMULES RELATIVES AUX POLYGONES RÉGULIERS;

par M. l'abbé E. GELIN, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy.

Notations.

a ou a_n côté du polygone régulier de n côtés;

R rayon du cercle circonscrit au polygone;

r apothème ou rayon du cercle inscrit;

S aire du polygone;

S_1 et V_1 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un axe passant par deux sommets opposés;

S_2 et V_2 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un axe passant par les milieux de deux côtés opposés;

S_3 et V_3 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre impair de côtés, tournant autour d'un axe passant par un sommet et le milieu du côté opposé;

S_4 et V_4 surface et volume engendrés par un polygone régulier tournant autour de l'un de ses côtés;

S_5 et V_5 surface et volume engendrés par un polygone régulier tournant autour de la tangente menée par l'un de ses sommets au cercle circonscrit.

Formules générales.

$$R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}},$$

$$a_n = \frac{a_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - a_{2n}^2},$$

$$S = \tfrac{1}{2} nar,$$

$$S_1 = 4\pi Rr, \qquad V_1 = \tfrac{4}{3}\pi Rr^2,$$

$$S_2 = 2\pi(R^2 + r^2), \qquad V_2 = \tfrac{2}{3}\pi r(R^2 + r^2),$$

$$S_3 = \pi(R + r)^2, \qquad V_3 = \tfrac{4}{3}\pi r(R + r)^2,$$

$$S_4 = 2n\pi ar, \qquad V_4 = n\pi ar^2,$$

$$S_5 = 2n\pi aR, \qquad V_5 = n\pi aRr.$$

Triangle équilatéral.

$$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3},$$
$$R = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3} = 2r,$$
$$r = \tfrac{1}{6}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}R,$$
$$S = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{4}R^2\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3},$$
$$S_3 = \tfrac{3}{4}\pi a^2 = \tfrac{9}{4}\pi R^2 = 9\pi r^2,$$
$$V_3 = \tfrac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3} = \tfrac{3}{8}\pi R^3 = 3\pi r^3,$$
$$S_4 = \pi a^2\sqrt{3} = 3\pi R^2\sqrt{3} = 12\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_4 = \tfrac{1}{4}\pi a^3 = \tfrac{3}{4}\pi R^3\sqrt{3} = 6\pi r^3\sqrt{3},$$
$$S_5 = 2\pi a^2\sqrt{3} = 6\pi R^2\sqrt{3} = 24\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_5 = \tfrac{1}{2}\pi a^3 = \tfrac{3}{2}\pi R^3\sqrt{3} = 12\pi r^3\sqrt{3}.$$

Carré.

$$a = R\sqrt{2} = 2r,$$
$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = r\sqrt{2},$$
$$r = \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2},$$
$$S = a^2 = 2R^2 = 4r^2,$$
$$S_1 = \pi a^2\sqrt{2} = 2\pi R^2\sqrt{2} = 4\pi r^2\sqrt{2},$$
$$V_1 = \tfrac{1}{6}\pi a^3\sqrt{2} = \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^3\sqrt{2},$$
$$S_2 = \tfrac{3}{2}\pi a^2 = 3\pi R^2 = 6\pi r^2,$$
$$V_2 = \tfrac{1}{4}\pi a^3 = \tfrac{1}{2}\pi R^3\sqrt{2} = 2\pi r^3,$$
$$S_4 = 4\pi a^2 = 8\pi R^2 = 16\pi r^2,$$
$$V_4 = \pi a^3 = 2\pi R^3\sqrt{2} = 8\pi r^3,$$
$$S_5 = 4\pi a^2\sqrt{2} = 8\pi R^2\sqrt{2} = 16\pi r^2\sqrt{2},$$
$$V_5 = \pi a^3\sqrt{2} = 4\pi R^3 = 8\pi r^3\sqrt{2}.$$

Pentagone régulier.

$$a = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$
$$R = \tfrac{1}{10}a\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = r(\sqrt{5} - 1),$$
$$r = \tfrac{1}{10}a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{5} + 1).$$

$$S = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \tfrac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}\pi a^2(5+2\sqrt{5}) = \tfrac{5}{8}\pi R^2(3+\sqrt{5}) = 5\pi r^2,$$
$$V_3 = \tfrac{1}{24}\pi a^3\sqrt{85+38\sqrt{5}} = \tfrac{5}{24}\pi R^3(\sqrt{5}+2) = \tfrac{5}{3}\pi r^3,$$
$$S_4 = \pi a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \tfrac{5}{2}\pi R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 20\pi r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$V_4 = \tfrac{1}{4}\pi a^3(5+2\sqrt{5}) = \tfrac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 10\pi r^3\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$S_5 = \pi a^2\sqrt{50+10\sqrt{5}} = 5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 20\pi r^2\sqrt{50-22\sqrt{5}},$$
$$V_5 = \tfrac{1}{4}\pi a^3(3\sqrt{5}+5) = \tfrac{5}{4}\pi R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 10\pi r^3\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

Hexagone régulier.

$$a = R = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3},$$
$$R = a = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3},$$
$$r = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3},$$
$$S = \tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{2}R^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3},$$
$$S_1 = 2\pi a^2\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3} = \tfrac{8}{3}\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_1 = \pi a^3 = \pi R^3 = \tfrac{8}{9}\pi r^3\sqrt{3},$$
$$S_2 = \tfrac{7}{2}\pi a^2 = \tfrac{7}{2}\pi R^2 = \tfrac{14}{3}\pi r^2,$$
$$V_2 = \tfrac{7}{12}\pi a^3\sqrt{3} = \tfrac{7}{12}\pi R^3\sqrt{3} = \tfrac{14}{9}\pi r^3,$$
$$S_4 = 6\pi a^2\sqrt{3} = 6\pi R^2\sqrt{3} = 8\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_4 = \tfrac{9}{2}\pi a^3 = \tfrac{9}{2}\pi R^3 = 4\pi r^3\sqrt{3},$$
$$S_5 = 12\pi a^2 = 12\pi R^2 = 16\pi r^2,$$
$$V_5 = 3\pi a^3\sqrt{3} = 3\pi R^3\sqrt{3} = 8\pi r^3.$$

Octogone régulier.

$$a = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1),$$
$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}} = r\sqrt{4-2\sqrt{2}},$$
$$r = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{2}+1) = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$S = 2a^2(\sqrt{2}+1) = 2R^2\sqrt{2} = 8r^2(\sqrt{2}-1),$$
$$S_1 = \pi a^2\sqrt{20+14\sqrt{2}} = 2\pi R^2\sqrt{2+\sqrt{2}} = 4\pi r^2\sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$V_1 = \frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{116+82\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\pi R^3(2+\sqrt{2}) = \frac{4}{3}\pi r^3\sqrt{4-2\sqrt{2}},$

$S_2 = \frac{1}{3}\pi a^2(7+4\sqrt{2}) = \frac{4}{3}\pi R^2(6+\sqrt{2}) = 2\pi r^2(5-2\sqrt{2}),$

$V_2 = \frac{4}{13}\pi a^3(11\sqrt{2}+15) = \frac{4}{13}\pi R^3\sqrt{100+62\sqrt{2}} = \frac{8}{3}\pi r^3(5-2\sqrt{2}),$

$S_4 = 8\pi a^2(\sqrt{2}+1) = 8\pi R^2\sqrt{2} = 32\pi r^2(\sqrt{2}-1),$

$V_4 = 2\pi a^3(3+2\sqrt{2}) = 2\pi R^3\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 16\pi r^3(\sqrt{2}-1),$

$S_5 = 8\pi a^2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 16\pi R^2\sqrt{2-\sqrt{2}} = 32\pi r^2\sqrt{20-14\sqrt{2}},$

$V_8 = 2\pi a^3\sqrt{20+14\sqrt{2}} = 4\pi R^3\sqrt{2} = 16\pi r^3\sqrt{20-14\sqrt{2}}.$

Décagone régulier.

$a = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1) = \frac{2}{5}r\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$R = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1) = \frac{1}{8}r\sqrt{50-10\sqrt{5}},$

$r = \frac{1}{2}a\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},$

$S = \frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$S_1 = \pi a^2\sqrt{50+22\sqrt{5}} = \pi R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\pi r^2\sqrt{50-10\sqrt{5}},$

$V_1 = \frac{1}{6}\pi a^3(7\sqrt{5}+15) = \frac{1}{6}\pi R^3(5+\sqrt{5}) = \frac{4}{15}\pi r^3\sqrt{50-10\sqrt{5}},$

$S_2 = \frac{1}{2}\pi a^2(11+4\sqrt{5}) = \frac{1}{4}\pi R^2(13+\sqrt{5}) = \frac{2}{5}\pi r^2(15-2\sqrt{5}),$

$V_2 = \frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{1885+842\sqrt{5}} = \frac{1}{12}\pi R^3\sqrt{125+38\sqrt{5}} = \frac{8}{15}\pi r^3(15-2\sqrt{5}),$

$S_4 = 10\pi a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 8\pi r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$V_4 = \frac{5}{2}\pi a^3(5+2\sqrt{5}) = \frac{5}{3}\pi R^3\sqrt{5} = 4\pi r^3\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$S_5 = 10\pi a^2(\sqrt{5}+1) = 10\pi R^2(\sqrt{5}-1) = 8\pi r^2(3\sqrt{5}-5),$

$V_8 = \frac{5}{2}\pi a^3\sqrt{50+22\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\pi R^3\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 4\pi r^3(3\sqrt{5}-5).$

Dodécagone régulier.

$a = \frac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2r(2-\sqrt{3}),$

$R = \frac{1}{2}a(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = r(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$

$r = \frac{1}{2}a(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{4}R(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$

$S = 3a^2(2+\sqrt{3}) = 3R^2 = 12r^2(2-\sqrt{2}),$

$$S_1 = \pi a^2 (3\sqrt{6}+5\sqrt{2}) = \pi R^2 (\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 4\pi r^2 (\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$
$$V_1 = \tfrac{1}{6}\pi a^3 (11\sqrt{6}+19\sqrt{2}) = \tfrac{1}{3}\pi R^3 (2+\sqrt{3}) = \tfrac{4}{3}\pi r^3 (\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$
$$S_2 = \tfrac{1}{2}\pi a^2 (15+8\sqrt{3}) = \tfrac{1}{2}\pi R^2 (6+\sqrt{3}) = 2\pi r^2 (9-4\sqrt{3}),$$
$$V_2 = \tfrac{1}{12}\pi a^3 (54+31\sqrt{3}) = \tfrac{1}{24}\pi R^3 (7\sqrt{6}+9\sqrt{2}) = \tfrac{2}{3}\pi r^3 (9-4\sqrt{3}),$$
$$S_4 = 12\pi a^2 (2+\sqrt{3}) = 12\pi R^2 = 48\pi r^2 (2-\sqrt{3}),$$
$$V_4 = 3\pi a^3 (7+4\sqrt{3}) = \tfrac{3}{2}\pi R^3 (\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 24\pi r^3 (2-\sqrt{3}),$$
$$S_3 = 12\pi a^2 (\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 12\pi R^2 (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 48\pi r^2 (3\sqrt{6}-5\sqrt{2}),$$
$$V_3 = 3\pi a^3 (3\sqrt{6}+5\sqrt{2}) = 6\pi R^3 = 24\pi r^3 (3\sqrt{6}-5\sqrt{2}).$$

QUESTIONS D'EXAMEN (*).

×Concours de St Cyr, 1891; compositions écrites.

A. Calcul logarithmique.

On donne dans un triangle

$$A = 112^\circ 28' 47'',3, \quad b = 26734, \quad c = 96879.$$

Calculez B, C, *a*.

Résultats : $a = 109912{,}82$, $B = 54^\circ 31' 55'',88$.

B. Mathématiques.

(12 juin, de 8 h. 45 à 11 h.)

I. Dans un triangle BAC, rectangle en A, on connaît la hauteur h abaissée sur l'hypoténuse et la médiane issue du sommet B. Déterminer l'hypoténuse par le calcul. Discussion. Construction du triangle.

II. On donne deux droites parallèles AX, BY et une perpendiculaire commune $AB = 2a$. On fait tourner un angle droit A'OB' autour de son sommet O placé au milieu de AB; ses côtés coupent AX, BY respectivement en A' et B'. Démontrer: 1° que le produit AA'. BB' est constant; 2° que $A'B' = AA' + BB'$. 3° que la droite A'B' reste tangente à un cercle fixe. 4° Par le milieu I de la hauteur OH du triangle A'OB' on mène une

(*) La librairie *Croville-Morant* (Paris, rue de la Sorbonne, 20) publie, depuis une trentaine d'années, les sujets des épreuves écrites et orales du baccalauréat ès-sciences, de l'examen d'admission à Saint-Cyr, à l'Ecole navale, à l'Ecole polytechnique, à l'École centrale des Arts et Manufactures, etc. Les solutions des questions de mathématiques, dues à M. Ed. Lucas, sont souvent accompagnées de remarques intéressantes et instructives.

parallèle à chacun des côtés de ce triangle et l'on considère les points où elle rencontre les deux autres côtés. Démontrer que les six points ainsi obtenus sont sur une même circonférence. 5° Minimum du rayon de cette circonférence.

I. Equations :

$$b^2 + c^2 = a^2, \quad 2m^2 + \tfrac{1}{2} b^2 = a^2 + c^2, \quad bc = ah.$$

Les deux premières donnent

$$3c^2 = 4m^2 - a^2, \quad 3b^2 = 4(a^2 - m^2); \tag{1}$$

substituant ces valeurs dans la 3e équation on obtient

$$4a^4 - (20m^2 - 9h^2)\, a^2 + 16m^4 = 0, \tag{2}$$

$$8a^2 = 20m^2 - 9h^2 \pm \sqrt{(20m^2 - 9h^2)^2 - (16m^2)^2}. \tag{3}$$

Pour que les valeurs de a soient réelles il faut que la quantité sous le radical soit positive et que le second terme de l'équation (2) soit négatif, ce qui donne

$$20m^2 - 9h^2 > 0, \quad 20m^2 - 9h^2 > 16m^2,$$

ou simplement $m > \frac{3}{2} h$. Cette condition est suffisante. En effet, d'après les égalités (1), a^2 doit être compris entre m^2 et $4m^2$; mais le premier membre de (2) prend les signes +, —, + quand on remplace a^2 respectivement par $m^2, 2m^2, 4m^2$; donc l'une des valeurs de a^2 est comprise entre m^2 et $2m^2$, l'autre entre $2m^2$ et $4m^2$.

Pour construire le triangle ABC, appelons B′ le milieu de AC, B″ la projection de B′ sur BC, O le milieu de BB′. Construisons d'abord le triangle BB′B″ au moyen des données $BB' = m$, $B'B'' = \frac{1}{2} h$.

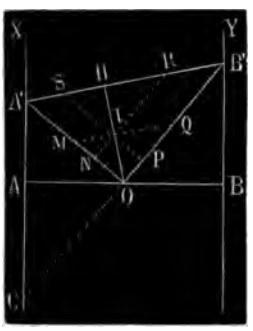
Le sommet A se déterminera par l'intersection de la circonférence décrite sur BB′ comme diamètre, avec une parallèle à BB″ menée à la distance h. Pour qu'il y ait rencontre, la distance de O à la parallèle doit être plus petite que le rayon; donc on doit avoir $\frac{3}{4} h < \frac{1}{2} m$, $m > \frac{3}{2} h$. Faisant $d = BB'' = \sqrt{(\frac{1}{4} h^2 + m^2)}$, on déduit du quadrilatère inscriptible AB′B″B, la relation $CB''.CB = CB'.CA = 2\overline{CB'}^2$ ou $(a - d)\, a = \frac{1}{2} h^2 + 2(a - d)^2$, relation que l'on peut tirer de (2).

II. Si OB′ rencontre AX en C, le triangle A′B′C est isoscèle, car $OB' = OC$ et A′O est perpendiculaire sur B′C. D'où

$1°\ \overline{OA}^2 = AA'.AC = AA'.BB'$; $2°\ A'B' = A'C = AA' + BB'$; $3°\ OA = OH$.

4° La parallèle à A′B′ coupe OA′, OB′ en leurs milieux M, Q; la parallèle à OA′ passe par le milieu S de A′H et rencontre OB′ en un

point P; enfin la parallèle à OB′ passe par le milieu R de HB′ et coupe OA′ en un point N. On voit facilement que la figure SMQR est un rectangle. Donc les points S, M, Q, R, sont sur une circonférence ayant pour diamètres MR, QS,; cette circonférence passe aussi par les points N, P, les angles RNM et SPQ étant droits.



5° $\overline{MR}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{RQ}^2 = \frac{1}{4}(\overline{A'B'}^2 + \overline{OH}^2)$;

OH étant constant, le minimum du cercle correspond au minimum de A′B′ ou de A′C; donc il a lieu pour A′C = 2 OA, c'est-à-dire lorsque l'angle AOA′ = 45°.

Le cercle MNPQ est le premier cercle de Lemoine du triangle ABC.

C. Epure.

(12 juin, de 1 h. 30^m à 4 h.)

Un tétraèdre SABC, dont l'angle trièdre S est trirectangle, a sa base ABC sur le plan horizontal. AB est sur la ligne de terre (A, vers la gauche) et a pour longueur 140^{mm}. La projection horizontale du sommet S est un point s dont les distances aux points A et B sont $As = 106^{mm}$, $Bs = 49^{mm}$.

Construire ce tétraèdre, puis son intersection avec la sphère ayant S pour centre et passant par le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on représentera la partie du volume du tétraèdre extérieure à la sphère S.

ÉCOLE NAVALE DE FRANCE.

Composition écrite de géométrie pure et de géométrie analytique(*).

(3 juin, de 7 à 10 1/2 h.)

I. Triangles sphériques polaires. Condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés.

(*) Nous empruntons les énoncés et en partie les solutions au fascicule publié par la librairie Croville-Morant.

II. Etant donné un cercle

$$x^2 + (y - \gamma)^2 = R^2$$

rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy et qui coupe l'axe des x en deux points A et A', on considère un point quelconque M de ce cercle défini par l'angle φ que le rayon CM fait avec l'axe des x :

Trouver l'équation générale des coniques passant par les points A et A' et tangentes en M à la circonférence C ; démontrer que toutes ces coniques ont leurs axes parallèles ; trouver la direction de ces axes.

Parmi ces coniques on considérera :

1° celle pour laquelle la direction de la tangente MT au cercle et la direction de l'axe des y sont conjuguées. Déterminer géométriquement son centre et ses axes en grandeur et direction. Lieu du centre quand le point M parcourt la circonférence C ;

2° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction Ox sont conjuguées. Mêmes questions que pour la précédente.

On exprimera en coordonnées polaires le lieu du centre.

Solution. La conique et le cercle ont pour sécantes communes AA' et MT ; donc d'après un théorème connu, les axes de la conique sont parallèles aux bissectrices des angles formés par ces sécantes.

1° Équation générale des coniques :

$$f(x, y) \equiv x^2 + (y - \gamma)^2 - R^2 - 2\lambda y [x \cos \varphi + (y - \gamma) \sin \varphi - R] = 0. \quad (1)$$

Équation du diamètre conjugué avec Oy :

$$\tfrac{1}{2} f'_y \equiv y - \gamma - \lambda [x \cos \varphi + (y - \gamma) \sin \varphi - R] - \lambda y \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Ce diamètre étant parallèle à MT, le premier et le dernier termes de l'équation (2) se détruisent ; d'où $\lambda = \dfrac{1}{\sin \varphi}$. Le centre satisfait aux égalités $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, ou

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R = 0, \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

Donc ses coordonnées sont $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$; ce point est donc à l'intersection d'une parallèle à CM menée par O avec une parallèle à OY menée par M. Il décrit un cercle.

La conique (1) rapportée à son centre a pour équation

$$x^2 - 2xy \cot \varphi - y^2 = R^2.$$

C'est une hyperbole équilatère dont les carrés des demi-axes sont égaux à $\pm R^2 \sin \varphi$.

2° Diamètre conjugué avec Ox : $x - \lambda y \cos\varphi = 0$; comme il est parallèle à OT, on a $\lambda = -\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. La conique considérée a donc pour équation

$$\cos^2\varphi\,[x^2 + (y-\gamma)^2 - R^2] + 2y\sin\varphi\,[x\cos\varphi + (y-\gamma)\sin\varphi - R] = 0.$$

Équations du centre :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0, \quad y - \gamma - R\sin\varphi = 0. \tag{3}$$

Le centre est donc à l'intersection d'une parallèle à CM par O, avec une parallèle par M à Ox. La coordonnée angulaire du centre est donc $\omega = \frac{\pi}{2} + \varphi$. Remplaçant φ, x, y par $\omega - \frac{\pi}{2}$, $\rho\cos\omega$, $\rho\sin\omega$, on déduit de la seconde des équations (3) :

$$\rho = \frac{\gamma - R\cos\omega}{\sin\omega}, \quad \text{ou} \quad (x^2+y^2)(y-\gamma)^2 - R^2x^2 = 0.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 670.

(Voir *Mathesis*, (1), IX, p. 280 et (2), I, p. 31.)

1° *Les cercles osculateurs d'une courbe plane ne peuvent rencontrer un même cercle sous un angle constant.* 2° *Il n'y a pas de courbes dont les sphères osculatrices rencontrent orthogonalement une sphère fixe.* 3° *Y en a-t-il dont les sphères osculatrices rencontrent une même sphère sous un angle constant ?* (E. Cesáro.)

Solution par M. V. Jamet (Marseille). 1° Soit une courbe plane C dont tous les cercles osculateurs coupent sous un angle constant un cercle fixe O, M un point situé sur la développée de C, s l'arc de cette développée compté à partir d'un point fixe et terminé en M; soit encore A l'un des points d'intersection du cercle O avec le cercle osculateur à la courbe C, et dont le centre est en M. Abaissons, du point O une perpendiculaire OI sur MA; observons que les longueurs OI, AI sont constantes et que, par conséquent, le rayon MA ne diffère que par une constante, de la tangente menée du point M, au cercle de centre O et de rayon OI. D'autre part, si le point M se meut sur la développée de C, la différentielle de ce

rayon sera égale à ds; si donc on désigne OI par a, et les coordonnées du point M par x, y, il y aura, entre x, y, s, la relation

$$ds = \frac{x dx + y dy}{\pm \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

les axes de coordonnées, rectangulaires, étant issus du point O; ou bien, en coordonnées polaires,

$$(r^2 - a^2)(r^2 d\theta^2 + dr^2) = r^2 dr^2$$

ou encore,

$$\pm d\theta = \frac{a dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{\frac{a dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}} = -d\left(\text{arc sin}\,\frac{a}{r}\right)$$

et, par conséquent,

$$a = r \sin(\theta_0 \pm \theta).$$

C'est l'équation générale des tangentes au cercle décrit du point O comme centre, avec a pour rayon. Donc la courbe cherchée aurait pour développée une ligne droite, ce qui est impossible.

2° Si toutes les sphères, osculatrices à une courbe fixe, coupaient à angle droit une sphère fixe O, on transformerait cette courbe, par rayons vecteurs réciproques, en une courbe dont toutes les sphères osculatrices couperaient un plan fixe à angle droit : il suffirait, pour cela, de placer le pôle de la transformation sur la sphère O. Mais le plan normal à la courbe transformée, étant sans cesse osculateur à la courbe, lieu des centres des sphères osculatrices, serait un plan fixe, ce qui est impossible.

3° La transformation par rayons vecteurs réciproques nous conduit encore à chercher une courbe dont toutes les sphères osculatrices coupent un plan fixe sous un angle constant.

A ce plan, pris pour plan des xy, nous rapporterons la courbe, lieu des centres des sphères osculatrices. Soient x, y, z, les coordonnées d'un point de cette courbe, s l'arc de cette courbe, compté à partir d'un point fixe et terminé en M, $d\sigma$ l'angle de contingence en M, $F(\sigma)$ son rayon de courbure au même point, R le rayon de la sphère osculatrice correspondante. Dans un mémoire inséré aux *Annales de la faculté de Toulouse* (année 1890, 1er fascicule), j'ai démontré la formule suivante :

$$R^2 = \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \cos\sigma d\sigma + A\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma) \sin\sigma d\sigma + B\right]^2 \qquad (a)$$

où A, B, désignent deux constantes. Si l'on appelle α l'angle donné, cette formule se transforme ainsi :

$$\frac{z^2}{\cos^2\alpha} = \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma d\sigma + A\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma d\sigma + B\right]^2$$

et l'on en déduit

$$z = \Phi(\sigma),$$

Φ désignant une fonction connue de la variable σ. Je vais chercher à exprimer x, y, en fonction de la même variable. A cet effet, je rappelle les formules connues :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \quad (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2 = ds^2 d\sigma^2,$$

d'où je déduis :

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 = F^2 - \Phi'^2, \quad \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 = F'^2 + F^2 - \Phi''^2.$$

La fonction F étant donnée, les seconds membres de ces deux égalités sont des fonctions connues de σ, et l'on est conduit à intégrer un système de deux équations différentielles simultanées, où x, y sont les fonctions inconnues de la variable σ.

A cet effet, nous poserons :

$$\frac{dx}{d\sigma} = \sqrt{F^2 - \Phi'^2}\cos\theta, \tag{2}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{d\sigma} = \sqrt{F^2 - \Phi'^2}\sin\theta. \tag{3}$$

Par suite, aussi :

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = -\sqrt{F^2 - \Phi'^2}\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{FF' - \Phi'\Phi''}{\sqrt{F^2 - \Phi'^2}}\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = \sqrt{F^2 - \Phi'^2}\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{FF' - \Phi'\Phi''}{\sqrt{F^2 - \Phi'^2}}\sin\theta$$

et

$$(F^2 - \Phi'^2)\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 + \frac{(FF' - \Phi'\Phi'')^2}{F^2 - \Phi'^2} = F'^2 + F^2 - \Phi''^2,$$

$$d\theta = \pm\frac{\sqrt{F^2(F^2 - \Phi'^2) - (F'\Phi' + F\Phi'')^2}}{F^2 - \Phi'^2}d\sigma.$$

On connaît ainsi la fonction θ par une quadrature : les formules (2), (3) font connaître x, y par des quadratures : les expressions obtenues, jointes à la formule (1), définissent la courbe, lieu des centres des sphères osculatrices. Soit S cette courbe : la courbe cherchée sera l'enveloppe des caractéristiques des sphères décrites des divers points de S comme centre, et dont le rayon est une fonction de σ, définie par la formule (a). Nous engageons nos jeunes lecteurs à examiner les formes particulières de la fonction $F(\sigma)$ qui donnent lieu à des résultats intéressants.

Question 685.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 128.)

On donne une conique K *et deux points* A, B *pris sur la courbe. Démontrer qu'il existe toujours deux points qui jouissent de la propriété suivante : Une droite quelconque menée par l'un ou l'autre de ces points rencontre la conique en deux points* P, Q *tels que la somme des angles* APB *et* AQB *est constante.*

Ces deux points sont le pôle et le milieu de la corde EF *qui est vue des points* A *et* B *sous des angles droits.* (G. TARRY.)

Solution par M. KLUYVER, *professeur à Amsterdam.* Nous déduisons cette proposition du théorème plus général que voici :

Etant donnés deux points A, B *sur une conique* K *et deux points* I, J *dans son plan, les droites qui rencontrent* K *en deux points* P, Q *satisfaisant à la condition*

$$P(ABIJ) \cdot Q(ABIJ) = m(*) \qquad (1)$$

enveloppent une autre conique K'. *Lorsqu'on fait varier la constante m, la conique* K' *engendre un faisceau tangentiel.*

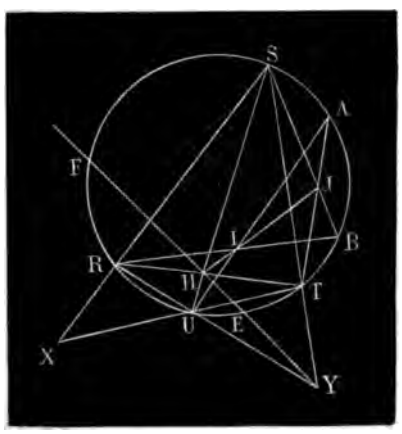
(*) (ABIJ) représente le rapport anharmonique

$$\frac{IA}{IB} : \frac{JA}{JB}.$$

Ce rapport est nul lorsque le troisième point coïncide avec le premier ou le quatrième avec le second ; il est infini lorsque le quatrième point se confond avec le premier ou le troisième avec le second. De même, P(ABIJ) désigne le rapport anharmonique

$$\frac{\sin IPA}{\sin IPB} : \frac{\sin JPA}{\sin JPB}.$$

Pour démontrer ce théorème, supposons le point P fixe sur la conique; alors un point Q du plan qui vérifie constamment l'égalité (1) engendre une conique K_1, car le rapport Q(ABIJ) a une valeur constante. K_1 passe par les points A, B, I, J; donc cette courbe coupe K en deux points Q, Q′ qui varient avec la position de P sur K; il en résulte que les cordes PQ, PQ′ enveloppent une même courbe K′ de la deuxième classe. Soient U, T, R, S les points de rencontre de K avec les droites AI, AJ, BI, BJ. Lorsque P est en U ou S, le rapport P(ABIJ) est nul; par suite, d'après la condition (1) le rapport Q(ABIJ) doit être infini ce qui fait coïncider Q avec T ou R. Donc UT, UR, ST, SR sont des tangentes à K′ qui ne dépendent pas de la valeur particulière de m; par conséquent les coniques K′ qui correspondent aux différentes valeurs de m sont inscrites au quadrilatère UTSR.



Un faisceau tangentiel comprend trois coniques dégénérées en des couples de points, qui sont les couples de sommets opposés du quadrilatère circonscrit. Le couple U, S correspond à $m = 0$; le système des points R, T, à $m = \infty$.

Soient Y, X les intersections des droites RU et ST, UT et SR; ces points représentent également l'une des coniques dégénérées du faisceau tangentiel. On peut donc énoncer le corollaire suivant du théorème énoncé plus haut:

Etant donnés deux points A, B *sur une conique* K *et deux points* I, J *dans son plan, il existe deux points* X, Y *jouissant de la propriété que toute droite menée par l'un de ces points rencontre la courbe en deux points* P, Q *tels que le produit des rapports anharmoniques* P(ABIJ), Q(ABIJ) *ait une valeur constante.*

Si l'on considère l'hexagone inscrit AUSBRTA, on voit que les droites US, RT, IJ concourent en un même point H. De plus, le triangle diagonal XYH du quadrilatère inscrit RUST est autopolaire; donc XY, polaire de H, passe par le pôle de IJ. Soient E, F les points de rencontre de YH avec K ou les points de contact des tangentes issues de X;

ce sont les points doubles de l'involution (UT, RS) et, par suite, les faisceaux A (IJEF), B (IJEF) sont harmoniques.

Pour passer au théorème de M. Tarry, prenons pour I, J les points cycliques. Alors les rapports anharmoniques P(IJAB), Q(IJAB) sont égaux à $e^{-2\alpha i}$, $e^{-2\beta i}$, α et β désignant les angles BPA, BQA ; si leur produit est constant, la somme $\alpha+\beta$ sera constante. La droite IJ étant à l'infini, la polaire XY de l'un de ses points passe par le centre de la conique K et X est le milieu de la corde EF. Enfin, les faisceaux A(IJEF), B(IJEF) étant harmoniques, les angles EAF, EBF sont droits.

MM. Decamps et Liénard ont esquissé de bonnes solutions analytiques, mais sans arriver à des résultats assez simples.

Question 714.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soient P, Q, R *trois points d'une parabole tels, que les normales concourent en un même point. Les tangentes en ces points rencontrent une perpendiculaire à l'axe en trois points d'où l'on mène trois nouvelles tangentes à la courbe. Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle formé par ces dernières tangentes passe par le sommet de la parabole.*

(Tucker.)

Solution par M. Déprez. La condition que la normale en un point (x, y) d'une parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$ passe par un point donné N (α, β), conduit à l'égalité

$$\beta - y = -\frac{y}{p}\left(\alpha - \frac{y^2}{2p}\right), \quad \text{ou} \quad y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0. \quad (1)$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées de trois points P, Q, R de la parabole tels que les normales concourent en N; y_1, y_2, y_3 étant les racines de (1), on a

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0. \quad (2)$$

Donc *le centre de gravité du triangle* PQR *est situé sur l'axe de la parabole* (théorème connu). Réciproquement, cette condition est suffisante pour que les normales concourent en un même point.

La tangente en un point (x, y) de la parabole a pour équation

$$Yy = p\left(X + \frac{y^2}{2p}\right), \quad \text{ou} \quad y^2 - 2Yy + 2pX = 0.$$

On en conclut que les ordonnées y', y'' des points de contact des tangentes issues d'un point M (X, Y) vérifient les égalités

$$y' + y'' = 2Y, \quad y'y'' = 2pX. \tag{3}$$

Cela posé, soient P', Q', R' les points de la parabole tels, que les tangentes en P et P', Q et Q', R et R' se coupent sur une même droite perpendiculaire à l'axe et ayant pour abscisse X, et soient (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3) les coordonnées de ces points. D'après la seconde des égalités (3), on a

$$y'_1 = \frac{2pX}{y_1}, \quad y'_2 = \frac{2pX}{y_2}, \quad y'_3 = \frac{2pX}{y_3},$$

et en remplaçant, dans (1), y par $\frac{2pX}{y'}$, on obtient l'équation

$$\beta y'^3 + 2X(\alpha - p)y'^2 - 4pX^3 = 0, \tag{4}$$

qui a pour racines y'_1, y'_2, y'_3. On observe immédiatement que

$$\frac{1}{y'_1} + \frac{1}{y'_2} + \frac{1}{y'_3} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma y'_2 y'_3 = 0. \tag{5}$$

Désignons par P'', Q'', R'' les sommets du triangle formé par les tangentes menées en P', Q', R' à la parabole, et par (x''_1, y''_1), ... leurs coordonnées. Les relations (3) donnent

$$2y''_1 = y'_2 + y'_3, \quad 2px''_1 = y'_2 y'_3, \quad \text{etc.} \tag{6}$$

Des égalités (5) et (6) on conclut facilement

$$x''_1 + x''_2 + x''_3 = 0; \tag{7}$$

donc le centre G du triangle P''Q''R'' est situé sur la tangente au sommet de la parabole. L'orthocentre (H) du même triangle étant sur la directrice et le centre ω du cercle circonscrit étant sur la droite HG à une distance $G\omega = \frac{1}{2}$ HG, on voit facilement que ω est sur la perpendiculaire élevée au milieu de la distance OF comprise entre le sommet O et le foyer F de la courbe; donc le cercle P'' Q'' R'' passe par O.

Soient P''', Q''', R''' les points où se coupent deux à deux les tangentes menées en P, Q, R; les ordonnées y'''_1, y'''_2, y'''_3 étant égales à

$$\tfrac{1}{2}(y_2 + y_3), \quad \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1), \quad \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2),$$

on a

$$y_1''' + y_2''' + y_3''' = 0;$$

donc le centre de gravité du triangle P''' Q''' R''' est situé sur l'axe de la parabole.

M. Decamps a résolu la même question en considérant l'équation du cercle P'' Q'' R'' sous la forme

$$\Sigma\lambda_1 [Yy_2' - p(X + x_2')][Yy_3' - p(X + x_3')] = 0. \qquad (8)$$

Pour que cette équation représente une circonférence passant par l'origine, on doit avoir

$$\Sigma\lambda_1 (y_2' y_3' + p^2) = 0, \quad \Sigma\lambda_1 (y_2' + y_3') = 0, \quad \Sigma\lambda_1 x_2' x_3' = 0.$$

Or, la dernière de ces égalités se ramène à

$$\Sigma\lambda_1 y_2'^2 y_3'^2 = 0;$$

la seconde, si l'on observe que l'équation (5) donne

$$y_2' + y_3' = -\frac{y_2' y_3'}{y_1'}, \text{ etc.},$$

prend la forme

$$\Sigma\lambda_1 \frac{y_2' y_3'}{y_1'} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma\lambda_1 y_2'^2 y_3'^2 = 0.$$

Donc le théorème est démontré.

Comme il n'a pas été fait usage de la condition que les termes en X^2, Y^2 de l'équation (8) aient même coefficient, on voit que toute conique circonscrite au triangle P'' Q'' R'' et ayant un axe parallèle à celui de la parabole passe par le sommet de cette courbe.

M. Tucker a signalé un grand nombre de propriétés, fort curieuses, du groupe des trois points P, Q, R qu'il appelle *points conormaux* (!) (Voir *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. XXI, N^{os} 397, 398).

×Question 720.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Quel que soit l'entier n, $n^{13} - n$ *est divisible par* 2730. (Anthony.)

Démonstration fondée sur le théorème de Fermat, par MM. E. Lemoine, Delahaye, Joachimescu, Russo, Mandart, Greenstreet, Soons, Emmerich. Il faut démontrer que $n(n^{12} - 1)$ est toujours divisible par chacun des facteurs 13, 7, 5, 3, 2. Or, d'après le théorème de Fermat, si ces facteurs ne divisent pas n, ils divisent respectivement $n^{12} - 1$, $n^6 - 1$, $n^4 - 1$, $n^2 - 1$, $n - 1$; donc ils divisent $n^{12} - 1$.

Démonstration directe, par MM. Denys, Decamps, François, Vladi-

MIRESCU et BELLENS. On a $2730 = 2.3.5.7.13$; démontrons, par exemple, que $n^{13} - n$ est toujours divisible par 7. On peut avoir

$$n = \mathcal{M}.\ 7, \quad \mathcal{M}.\ 7 \pm 1, \quad \mathcal{M}.\ 7 \pm 2, \quad \mathcal{M}.\ 7 \pm 3.$$

Dans le premier cas, la propriété est évidente. Dans les autres cas, on trouve facilement

$$n^2 = \mathcal{M}.\ 7+1, \quad \mathcal{M}.\ 7+4, \quad \mathcal{M}.\ 7+2,$$

$$n^4 = \mathcal{M}.\ 7+1, \quad \mathcal{M}.\ 7+2, \quad \mathcal{M}.\ 7+4,$$

$$n^{12} = (n^4)^3 = \mathcal{M}.\ 7+1; \quad \mathcal{M}.\ 7+1; \quad \mathcal{M}.\ 7+1;$$

donc $n^{13} - 1 = \mathcal{M}.\ 7$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

720. On donne une droite AB, une circonférence C, et une droite CDP, sur laquelle on prend deux points fixes, D et P. Par le point P, on mène, arbitrairement, une transversale qui coupe en E la droite AB, en F et G la circonférence C. On joint E à D, F et G à C, par les droites DE, CF, CG qui se coupent en M, M'. Le lieu des points M, M' est une conique, dont on demande la discussion. (E. CATALAN.)

730. Étant donnée une circonférence O, on prolonge un rayon quelconque OM de la longueur $MN = n$. MP, où MP est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité M du rayon sur un diamètre fixe AA'. 1° Démontrer que le lieu du point N est un limaçon de Pascal; 2° Trouver l'aire de la courbe; 3° Trouver la longueur de la courbe, dans le cas de $n = 1$.

(KEELHOFF.)

***731.** On donne deux droites concourantes OG, OL et deux cercles concentriques de centre O. On mène au cercle intérieur une tangente variable SR, et des points S et R, où elle rencontre OG, OL, les tangentes SA, RA au cercle extérieur. Trouver le maximum de l'angle SAR.

(G. H. NIEWENGLOWSKI.)

***732.** Les droites menées par les sommets d'un triangle ABC parallèlement à une même direction donnée rencontrent la circonférence circonscrite aux points A', B', C'. Les droites de Simson relatives à ces points forment un triangle A''B''C''. Démontrer que le lieu du centre de la circonférence A''B''C'' est la circonférence décrite sur HO pour diamètre. (SOLLERTINSKY.)

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES,

par M. SOLLERTINSKY.

On appelle *quadrilatère harmonique* un quadrilatère inscriptible MFM'F' (fig. 1), dans lequel le produit de deux côtés opposés MF . M'F' est égal au produit des deux autres côtés opposés MF'. M'F. Les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés M'F, M'F', sont proportionnelles aux côtés MF, MF' (à cause de deux triangles semblables) et par suite aux côtés M'F, M'F'; donc MM' est la symédiane du triangle M'FF'; par analogie, c'est aussi la symédiane de MFF' et FF' est une symédiane dans les deux triangles FMM', F'MM'.

Soient C, D les milieux des diagonales FF', MM', et G le milieu du côté M'F'. Les angles F'M'C, M'F'C étant égaux aux angles MM'F et M'MF, les triangles M'F'C, M'MF sont directement semblables; donc aussi le triangle MDF est semblable à F'GC ou à F'M'F. Par analogie, le triangle F'DM est semblable à F'M'F; donc les triangles MDF, F'DM sont semblables entre eux, et il en est de même de M'DF et F'DM'. Il résulte de là que MM' est la bissectrice de l'angle FDF' et que

$$\overline{DM}^2 = \overline{DM'}^2 = DF \cdot DF'.$$

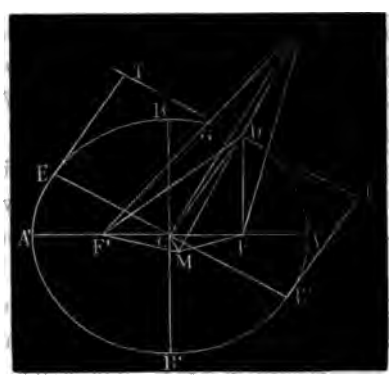


Fig. 1.

Réciproquement, si sur la bissectrice de l'angle D d'un triangle FDF' on prend les longueurs

$$DM = DM' = \sqrt{DF \cdot DF'},$$

les points M, F, M', F' sont les sommets d'un quadrilatère harmonique.

Ces notions sont connues (voir *Mathesis*, t. V, p. 202); mais il n'était peut-être pas inutile de les rappeler ici avant de les appliquer à une question déjà traitée par plusieurs auteurs.

I. Soit D un point quelconque d'une ellipse ABA'B' ayant pour centre C, pour foyers F, F'. Portons sur la normale en D les longueurs $DM = DM' = \sqrt{DF \cdot DF'}$; le quadrilatère MFM'F' sera harmonique.

La droite CF sera donc aussi la bissectrice de l'angle MCM′ et égale à $\sqrt{\text{CM} \cdot \text{CM}'}$.

Or, de $\text{DF} + \text{DF}' = 2a$ on tire

$$2\text{DF} \cdot \text{DF}' = 4a^2 - (\overline{\text{DF}}^2 + \overline{\text{DF}'}^2) = 4a^2 - 2(\overline{\text{DC}}^2 + \overline{\text{CF}}^2) = 2(a^2 + b^2 - \overline{\text{DC}}^2);$$

mais si CE est le demi-diamètre conjugué avec CD, l'on a $\overline{\text{CD}}^2 + \overline{\text{CE}}^2 = a^2 + b^2$. Donc $\text{DF} \cdot \text{DF}' = \overline{\text{CE}}^2$. Ainsi, *le produit des rayons vecteurs d'un point* D *de l'ellipse est égal au carré du demi-diamètre conjugué avec celui qui passe par* D (théorème connu).

II. Calculons CM et CM′. Nous avons

$$\text{CM} \cdot \text{CM}' = \overline{\text{CF}}^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$\overline{\text{CM}}^2 + \overline{\text{CM}'}^2 = 2(\overline{\text{CD}}^2 + \overline{\text{DM}}^2) = 2(\overline{\text{CD}}^2 + \overline{\text{CE}}^2) = 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2;$$

il en résulte

$$\text{CM} = (a - b), \quad \text{CM}' = (a + b).$$

Par conséquent : *connaissant deux demi-diamètres conjugués* CD, CE *d'une ellipse, si sur une perpendiculaire abaissée de* D *sur* CE *on porte les longueurs* $\text{DM} = \text{DM}' = \text{CE}$, *on obtient les foyers* F, F′ *en prenant sur la bissectrice de l'angle* MCM′ *les longueurs* $\text{CF} = \text{CF}' = \sqrt{\text{CM} \cdot \text{CM}'}$; *les distances* CM′, CM *sont égales à la demi-somme et à la demi-différence des axes de l'ellipse.* (Chasles.)

III. Cette proposition admet plusieurs conséquences, fort curieuses.

1. Les points M, M′ sont les foyers d'une ellipse passant par C, tangente au petit axe BB′ et ayant même grand axe que l'ellipse proposée.

2. Si sur la normale en un point D d'une ellipse on porte les longueurs DM, DM′ égales à la moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs DF, DF′, les points M, M′ décrivent deux circonférences concentriques avec l'ellipse et ayant pour rayons la demi-différence et la demi-somme des axes de l'ellipse.

3. Réciproquement, étant données deux circonférences de même centre C, si deux rayons CM, CM′ tournent constamment avec la même vitesse angulaire dans des sens contraires, le milieu D de la droite qui joint leurs extrémités engendre une ellipse ayant pour axes la somme et la différence des rayons des deux cercles.

4. Les tangentes aux extrémités E, E′ du diamètre CE rencontrent la tangente menée en D aux points T, T′, qui décrivent une ellipse ayant

pour axes $2a\sqrt{2}$, $2b\sqrt{2}$; CT et CT′ sont deux diamètres conjugués de cette nouvelle ellipse, et la figure TMT′M′ est un carré. Donc si l'on construit un carré ayant pour diagonale la corde TT′ qui joint les extrémités de deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, les extrémités de la seconde diagonale se meuvent sur deux circonférences.

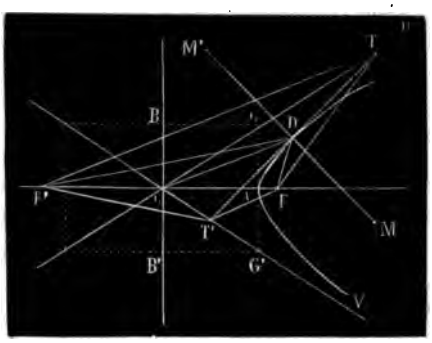


Fig. 2.

IV. Considérons maintenant une hyperbole (fig. 2) ayant pour centre C, pour foyers F et F′, pour asymptotes CU, CV. Un point quelconque D de cette courbe est le milieu de la tangente TT′ limitée par les asymptotes.

Le triangle CTT′ a une surface constante; donc si GG′ est la tangente au sommet A, on a

$$CT.CT' = CG.CG' = \overline{CF}^2 = \overline{CF'}^2.$$

D'ailleurs FF′ est la bissectrice de l'angle TCT′; par conséquent, *les foyers* F, F′ *d'une hyperbole et les points* T, T′ *où une tangente coupe les asymptotes sont les sommets d'un quadrilatère harmonique* TFT′F′.

Il résulte de là que

$$DT = DT' = \sqrt{DF.DF'};$$

mais DT est égal au demi-diamètre conjugué avec CD; donc on retrouve ici, par une méthode peut-être nouvelle, la propriété démontrée ci-dessus (§ I) pour l'ellipse.

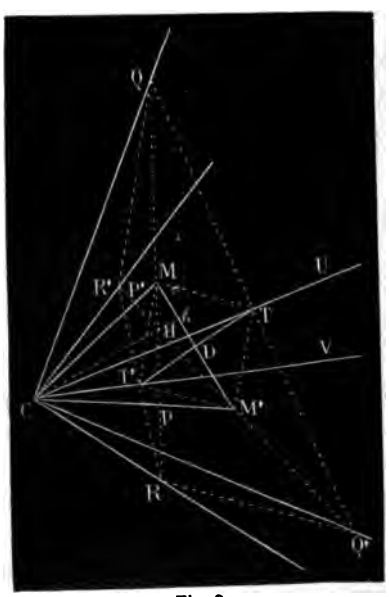


Fig. 3.

V. Portons maintenant sur la normale en D les segments

$$DM = DM' = \sqrt{DF.DF'} = DT \text{ (fig. 3)}.$$

Les points M, M′ *décrivent deux hyperboles* (M), (M′) *dont chacune est égale à la conjuguée de l'autre, qui sont polaires réciproques par rapport*

au cercle décrit du centre C *avec le rayon* $\sqrt{a^2-b^2}$, *et dont les axes ont pour longueurs* $2(a-b)$, $2(a+b)$.

Pour démontrer cette proposition, portons sur la hauteur MP du triangle CMM' les segments MR = MQ = CM', et sur la hauteur M'P' les segments M'R' = M'Q' = CM. Les triangles CMR, R'M'C ont deux couples de côtés CM et R'M', MR et M'C égaux et perpendiculaires; donc ils sont égaux et les troisièmes côtés CR et CR' sont égaux et perpendiculaires. On démontre de même que CQ et CQ' sont égaux et perpendiculaires. Les triangles CRQ', CR'Q ont les côtés CR et CR', CQ' et CQ égaux et perpendiculaires. Appelons T, T' les milieux des droites Q'Q, RR'; les droites M'T, MT' qui joignent les milieux de deux côtés des triangles Q'QR', RQR' sont parallèles à QR' et égales à $\frac{1}{2}$ QR'; les droites MT, M'T' sont parallèles à RQ' et égales à $\frac{1}{2}$ RQ'. Il résulte de là que la figure MTM'T' est un carré.

Mais on a supposé DM = DM' = $\sqrt{DF.DF'}$; donc TT' est bien la tangente au point D de l'hyperbole, et T, T' sont les points où cette tangente rencontre les asymptotes.

Les droites CT, CT' sont donc fixes; les droites CR, CR' qui font un angle de 45° avec CT', et les droites CQ, CQ' qui font un angle de 45° avec CT sont également fixes. Je dis maintenant que l'aire CRQ est constante. En effet, elle a pour mesure $\frac{1}{2}$ RQ . CP = CM'.CP; mais

$$\overline{MM'}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{CM'}^2 - 2CM'.CP = 2\overline{CD}^2 + 2\overline{DM'}^2 - 2CM'.CP,$$

d'où

$$2CM'.CP = 2\overline{CD}^2 + 2\overline{DM'}^2 - MM'^2 = 2(\overline{CD}^2 - DM'^2)$$
$$= 2(\overline{CD}^2 - \overline{DT}^2) = 2(a^2 - b^2).$$

Par conséquent, la droite QR se meut de manière à déterminer avec les droites fixes CR, CQ un triangle d'aire constante; elle enveloppe donc une hyperbole ayant pour asymptotes les droites CR, CQ qui font avec les asymptotes de l'hyperbole donnée un angle de 45°; le point de contact de QR est précisément son milieu M.

Les angles R'CQ', RCQ sont supplémentaires; donc les triangles CR'Q', CRQ sont équivalents. Par conséquent, les droites QR, Q'R' enveloppent des hyperboles dont l'une est égale à la conjuguée de l'autre; M et M' sont les points de contact.

Pour trouver les axes des hyperboles (M), (M'), il suffit de faire coïn-

cider D avec un sommet réel de l'hyperbole proposée; les demi-axes réels de (M), (M') sont alors les distances $CM = a - b$, $CM' = a + b$; les demi-axes imaginaires sont évidemment $a + b$, $a - b$.

On a trouvé ci-dessus

$$CP \cdot CM' = CP' \cdot CM = a^2 - b^2.$$

Donc M' est le pôle de QR par rapport à un cercle Δ décrit de C comme centre avec le rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$; de même, M est le pôle de Q'R'. Donc les courbes (M), (M') sont polaires réciproques par rapport à ce cercle.

VI. La proposition que nous venons d'établir est probablement nouvelle. Elle admet beaucoup de conséquences.

1. L'orthocentre H du triangle CMM' décrit la polaire réciproque de la développée de l'hyperbole (D) par rapport au cercle Δ. Car

$$CH \cdot Ch = CP \cdot CM' = a^2 - b^2.$$

2. Les coordonnées (x_1, y_1) (x'_1, y'_1) des points M, M' s'expriment très simplement en fonction des coordonnées (x, y) du point D. En effet,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a-b}{a}\, x, \\ y_1 = \dfrac{a+b}{b}\, y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{a+b}{a}\, x, \\ y'_1 = -\dfrac{a-b}{b}\, y. \end{cases}$$

3. Les droites RR', QQ' se coupent en un point μ diamétralement opposé à C sur la circonférence CTT'. Le lieu de μ est donc une hyperbole.

4. Sur MM' comme diagonale construisons un rectangle $Mm M'm'$ dont les côtés sont parallèles aux axes de l'hyperbole proposée. Les sommets de la seconde diagonale ont pour cordonnées (x_1, y'_1), (x'_1, y_1); donc ils décrivent des hyperboles équilatères ayant pour équations

$$x_1^2 - y_1'^2 = (a-b)^2, \quad x_1'^2 - y_1^2 = (a+b)^2.$$

Ces deux coniques sont encore polaires réciproques par rapport au cercle Δ. La droite mm' enveloppe une courbe ayant pour équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}};$$

c'est ce qu'on trouve aisément en observant que cette droite est la symétrique de la normale MM' à l'hyperbole donnée par rapport à l'ordonnée de D.

5. Le cercle circonscrit au carré MT M'T' est de puissance constante

$(a^2 - b^2)$ par rapport au centre C; il a donc pour enveloppe une anallagmatique dont la déférente est l'hyperbole donnée.

La figure précédente donne encore lieu à d'autres remarques intéressantes.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Algèbre élémentaire, par l'abbé F. VERHELST, docteur en philosophie, licencié en sciences physiques, professeur au collège St-Jean Berchmans à Anvers. *Tome deuxième*. Bruxelles, E. Ramlot, 1891. Un vol. in-8° de 196 pages.

Le tome deuxième du *Cours d'Algèbre* de M. l'abbé Verhelst renferme le calcul des radicaux, la résolution des équations du second degré, des questions de maximum et de minimum, des équations bicarrées, des équations réciproques et des équations binômes, les progressions, les logarithmes définis par les progressions et par la fonction exponentielle, les arrangements, les combinaisons et la formule du binôme. Les théories sont, comme dans le premier volume, exposées simplement, clairement, avec méthode et rigueur, et accompagnées d'exercices nombreux et bien choisis.

Peu de manuels d'Algèbre sont autant à la portée des élèves; peu sont à ce point appropriés à l'enseignement élémentaire; peu, croyons-nous, obtiendront un succès plus grand et plus mérité. H. GELIN.

Cours d'Algèbre, à l'usage de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École Polytechnique, par B. NIEWENGLOWSKI, Docteur ès-sciences, ancien élève de l'École normale supérieure, Professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand. Deuxième édition. Paris, Colin et C^ie^ 1891. (Deux volumes gr. in-8° de II-385 et 508 p.). Prix : 12 francs.

Voici le sommaire de cet ouvrage dont nous publions un compte rendu détaillé dans la *Revue des questions scientifiques*.

LIVRE I. *Compléments d'algèbre élémentaire*. 1, 2 3. Limites des sommes, produits, quotients, racines; exposants fractionnaires, négatifs, incommensurables. 4, 5, 6. Polynômes ordonnés, division, plus grand commun diviseur. 7, 8, 9, 10, 11. Analyse combinatoire, binôme, formule de Taylor, racine m^ième^ d'une polynôme. 12. Limites de quelques expressions irrationnelles. 13, 14, 15. Déterminants, équations du premier degré, formes linéaires. 16. Imaginaires.

LIVRE II. 1. Séries. 2. Fractions continues. 3. Continuité. 4. Fonctions exponentielles; logarithmes.

LIVRE III. *Notions de calcul différentiel et de calcul intégral*. 1. Infiniment petits. 2. Calcul différentiel. 3. Applications à l'étude de la variation des fonctions. 4. Formules de Taylor et de Maclaurin. 5. Règle de l'Hospital. 6. Intégrales définies. 7. Fonctions de plusieurs variables indépendantes. 8. Formes quadratiques.

LIVRE IV. *Théorie des équations*. 1. Théorème fondamental; Racines infinies, etc. 2. Fonctions symétriques. 3. Divisibilité algébrique. 4. Racines égales. 5. Elimi-

nation. 6. Transformation des équations; abaissement. 7. Théorème de Descartes, de Rolle, de Budan et de Sturm. 8. Limites des racines. Racines commensurables. 9. Racines incommensurables. 10. Équations du 3e et du 4e degré. 11. Décomposition des fractions rationnelles. 12. Théorie des différences.

APPENDICE. 1. Fonction continue sans dérivée. 2. Démonstration du théorème fondamental de l'analyse algébrique, par Walecki. 3. Questions proposées dans divers concours et problèmes divers.

Le manuel de M. Niewenglowski est très complet; il dépasse de beaucoup les exigences des programmes. Nulle part, l'auteur n'a sacrifié la rigueur à la simplicité. Dans les théories des incommensurables, de la divisibilité algébrique, des imaginaires, des dérivées, des intégrales définies, son livre est à la hauteur des progrès réalisés par l'analyse depuis trente ans. Près de six cents exercices, souvent très difficiles, forment le complément des théories exposées dans le texte du livre.

Le *Cours d'Algèbre* de M. Niewenglowski est peut-être d'un usage difficile pour les élèves, comme semble le dire l'auteur lui-même dans sa préface, mais il rendra incontestablement de grands services aux professeurs de mathématiques spéciales désireux de se tenir au courant des méthodes rigoureuses d'exposition de l'analyse mathématique.

P. MANSION.

Extension de la méthode de Gräfe. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes, par M. E. CARVALLO, professeur au lycée S. Louis. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1890 (40 p. in-4°).

Au moyen du théorème de Taylor, on peut toujours ramener approximativement une équation transcendante à une équation algébrique. Une équation algébrique étant mise sous la forme $F(-x^2) + xf(-x^2) = 0$, on trouve aisément que si l'on pose $y + x^2 = 0$, la transformée en y est $(Fy)^2 + y(fy)^2 = 0$, de même degré que la première. En appliquant plusieurs fois cette transformation, on déduira, de l'équation donnée, une autre équation

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

où les racines seront égales à $-x^\mu$, μ étant une puissance de 2 aussi grande qu'on le veut. Les coefficients A se calculent aisément, d'une manière approximative, par le secours des logarithmes.

Aux racines de module distinct de l'équation en x, correspondent, dans l'équation en z, des racines de module tellement différent, pour μ suffisamment grand, que celles de module le plus petit sont absolument négligeables devant les autres. Par exemple, si toutes les racines de l'équation en x sont réelles, pour μ assez grand, les racines $a, b, \ldots, l$ de l'équation en z, qui sont telles que

$$a + b + \cdots + l = -\frac{A_1}{A_0}, \quad ab + ac + \cdots + kl = +\frac{A_2}{A_0}, \text{ etc.},$$

pratiquement vérifieront les relations

$$a = -\frac{A_1}{A_0}, \quad ab = \frac{A_2}{A_0}, \quad abc = -\frac{A_3}{A_0}, \quad \text{etc.},$$

si l'on suppose $a > b > c$, etc. Autrement dit, l'équation en z pourra subir une *dissociation complète* et être remplacée par

$$A_0 a + A_1 = 0, \quad A_1 b + A_2 = 0, \quad A_2 c + A_3 = 0, \text{ etc.}$$

Si l'équation en x a des racines de même module, par exemple des racines imaginaires, la *dissociation* de l'équation en z sera *incomplète*. Ainsi, en particulier, si les m racines de cette équation se divisent en trois groupes, j de module R ou supérieur à R, k de module R′ ou voisin de R′, l de module R″ ou inférieur à R″, les rapports R′ : R, R″ : R′ étant très petits, l'équation en z se dissociera en les trois suivantes :

$$A_0 z^j + A_1 z^{j-1} + A_2 z^{j-2} + \cdots + A_j = 0,$$
$$A_j z^k + A_{j+1} z^{k-1} + A_{j+2} z^{k-2} + \cdots + A_{j+k} = 0,$$
$$A_{j+k} z^l + A_{j+k-1} z^{l-1} + A_{j+k-2} z^{l-2} + \cdots + A_m = 0,$$

dont la première donnera les racines de module égal ou supérieur à R, la seconde celles de module voisin de R′, la troisième celles de module égal ou inférieur à R″.

Telle est, en substance, la méthode du géomètre suisse, Gräfe (1837), dont Encke (1841) et Merino (1879) ont signalé les avantages avant M. Carvallo. Mais c'est ce dernier qui a eu le mérite de l'exposer d'une manière pratique dans sa dissertation doctorale. Nous renvoyons le lecteur à cet intéressant opuscule pour la détermination du nombre μ et pour les détails des calculs et des exemples. Selon nous, tous ceux qui doivent enseigner la théorie des équations ne peuvent se dispenser de le lire et d'en faire connaître la substance à leurs élèves. (P. M.)

SUR LA DISTANCE DE DEUX POINTS;

par M. Aug. Poulain, à Angers.

M. Thiry a déduit récemment du théorème de Stewart, et sans trigonométrie, une formule qui donne la distance de tout point du plan d'un triangle à un potentiel d'ordre quelconque (*). Cette formule n'est qu'un cas particulier d'une de celles que Lagrange a données en 1783 (**). Elles s'appliquent à deux points quelconques M, M_0, rapportés à n points de référence A, B, ..., situés ou non dans le même plan.

Soient α, β, ... les coordonnées barycentriques de M, c'est-à-dire les masses à appliquer à A, B, ... pour que M soit leur centre de gravité;

(*) Supplément de *Mathesis*, juin 1891; et *Applications du théorème de Stewart* (Hoste, à Gand, et Gauthier-Villars).

(**) Tome V de l'édition Serret, p. 535. La démonstration occupe trois pages in-4°. (Voir aussi Steiner, *G. Werke*, II, p. 102-159, ou *Crelle*, XXI, 33-63. *Réd.*)

$\lambda_0, \mu_0, \ldots$ les coordonnées multipolaires de M_0, c'est-à-dire les distances $M_0A, \ldots$ Posons enfin $\sigma = \alpha + \beta + \cdots$ D'après Lagrange, on a

$$(1) \qquad \overline{MM_0}^2 = \frac{\Sigma\alpha\lambda_0^2}{\sigma} - \frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta}{\sigma^2},$$

$$(2) \qquad \overline{MM_0}^2 = \frac{\Sigma\alpha(\lambda_0^2 - \lambda^2)}{\sigma}.$$

La remarquable méthode de M. Thiry permet d'établir la formule (1) dans toute sa généralité. En effet, soit P le centre de gravité des masses, sauf α. Si nous regardons le théorème comme vrai pour $n - 1$ masses, nous pouvons calculer M_0P, AP et alors il suffit d'appliquer le théorème de Stewart au triangle M_0AP.

De là on passe à la formule (2), en amenant M_0 en M. Le premier membre de (1) devenant nul donne

$$(3) \qquad \Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta = \sigma\Sigma\alpha\lambda^2,$$

et cette égalité permet de passer de (1) à (2).

Voici, pour (1), une autre démonstration, très rapide(*). Menons par M_0 trois axes rectangulaires. M étant un centre de gravité, ses coordonnées rectilignes X, Y, Z sont données par des équations de la forme

$$X = \frac{\Sigma\alpha\lambda_0 \cos XM_0A}{\sigma}; \quad Y = \text{etc.}; \quad Z = \text{etc.};$$

d'où élevant au carré et ajoutant,

$$(4) \qquad \overline{MM_0}^2 = \frac{\Sigma\alpha^2\lambda_0^2 + 2\Sigma\alpha\beta\lambda_0\mu_0 \cos AM_0B}{\sigma^2}.$$

Si on remplace $2\lambda_0\mu_0 \cos AM_0B$ par $\lambda_0^2 + \mu_0^2 - \overline{AB}^2$, on trouve (1).

Applications. 1° La formule (1) comprend celle de Stewart (c'est le cas de deux points de référence), et par suite celles qui sont relatives à la médiane et à la bissectrice d'un triangle.

2° Elle donne les valeurs des coordonnées multipolaires $\lambda, \mu, \ldots$ de M en fonction de ses barycentriques $\alpha, \beta, \ldots$ Il suffit d'amener M_0 en A. Comme conséquence, Lagrange fait remarquer qu'étant données les

(*) C'est à peu près celle qui se trouve dans les *Exercices de mécanique* par de St Germain (1889, n° 21). Nous sommes arrivé à ces formules tripolaires par une autre voie dans le *Journal de Mathém. spéciales*, 1889, p. 8.

masses de différents corps et leurs distances mutuelles, on peut calculer la distance λ, ... de chacun d'eux au centre de gravité.

3° Cette formule (1) donne immédiatement la formule d'Euler relative à OI. On a

$$\overline{OI}^2 = R^2 - \frac{abc}{2p} = R^2 - 2Rr.$$

De même, elle donne le théorème de Feuerbach. Il suffit de calculer λ_0, ... pour le centre O_9 du cercle des neuf points, ce qui s'obtient en égalant deux valeurs de la puissance de A par rapport à ce cercle. On trouve

$$\lambda_0^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{bc\cos A}{2}.$$

Par suite

$$\overline{IO_9}^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{abc}{4p}(\Sigma\cos A - 2) = \frac{R^2}{4} + Rr\left(\frac{r}{R} - 1\right) = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

4° Si tous les points A, B, ... sont sur un même cercle ou une même sphère de rayon R, la puissance P de M, c'est-à-dire $\overline{MM_0}^2 - R^2$, a d'après (1), pour valeur

$$P = -\frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta}{\sigma}. \tag{5}$$

On en tire immédiatement l'équation du cercle circonscrit à ABC ... et, par suite, l'équation d'un cercle quelconque, en exprimant qu'on a une conique passant par l'intersection du premier cercle avec la droite de l'infini $\sigma = 0$,

$$\sigma\Sigma l\alpha - \Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta = 0.$$

Même résultat pour les sphères.

5° On sait que, dans le cas d'un triangle de référence, la distance MM_0 a pour valeur

$$\begin{aligned}\overline{MM_0}^2 &= -\Sigma\overline{AB}^2\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\alpha_0}{\sigma_0}\right)\left(\frac{\beta}{\sigma} - \frac{\beta_0}{\sigma_0}\right) \\ &= -\frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta}{\sigma^2} - \frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha_0\beta_0}{\sigma_0^2} + \frac{\Sigma\overline{AB}^2(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0)}{\sigma\sigma_0}.\end{aligned} \tag{6}$$

Cette formule reste vraie pour un nombre quelconque de points de référence A, B, ... et même dans l'espace. On la tire de (1) en remplaçant λ_0, ... en fonction de α_0, ...

ˣNOTES MATHÉMATIQUES.

10. ***Sur les formules de la Trigonométrie sphérique*** (d'après M. Ed. Lucas). Pour l'établissement des formules générales de la géométrie analytique à trois dimensions et de la trigonométrie sphérique, il est préférable de prendre pour angles d'un triangle sphérique ABC, les suppléments des angles intérieurs. Soient donc a, b, c les côtés et A, B, C les angles ***extérieurs*** du triangle ABC. On a, moyennant cette convention,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad \cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} A} + \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} = 0, \quad \frac{\cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} A} + \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} = 0. \quad \text{(Delambre.)}$$

Si l'on pose

$$2p = a + b + c, \quad 2P = A + B + C,$$

la formule de Lhuillier s'écrit

$$\cot^2 \tfrac{1}{2} P = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-c),$$

et donne par la considération du triangle A'BC (A' est l'antipode de A)

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(P - A) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-c)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} p \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-a)}.$$

On peut permuter les lettres minuscules et les lettres majuscules et écrire par exemple

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(p-a) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-B) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-C)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} P \operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-A)}.$$

De là

$$\cot \tfrac{1}{2} p \cot \tfrac{1}{2} P = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-A) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-B) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-c) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-C)$$

11. ***Problème de l'héritage. — Sixième solution.*** Finck, dans son ***Système d'Algèbre élémentaire***, Strasbourg 1839, page 560, donne la solution suivante, qu'il attribue à Euler, et qui diffère peu de la quatrième, de M. Catalan (p. 112) :

« On représentera, avec Euler, par x le bien total, par p_m la part du rang m, par s_{m-1} la somme des parts précédentes, et l'on aura

$$p_m = am + \frac{x - s_{m-1} - am}{n},$$

$$p_{m+1} = a(m+1) + \frac{x - s_{m-1} - p_m - a(m+1)}{n},$$

d'où

$$p_{m+1} - p_m = a - \frac{p_m + a}{n},$$

et

$$p_{m+1} = p_m \cdot \frac{n-1}{n} + a \cdot \frac{n-1}{n}. \qquad (1)$$

Cette relation prouve qu'il est permis de faire $p_{m+1} = p_m$, c'est-à-dire de supposer les parts égales : car cette hypothèse introduite dans (1) donne $p_m = a(n-1)$, quantité qui est en effet indépendante de m. »

« Je ferai observer, ajoute Finck, que cette solution n'a pas toute la généralité possible, si on ne suppose pas $p_m = p_{m+1}$. En effet, l'équation (1) est une équation aux différences finies, dont l'intégrale est

$$p_m = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^m,$$

C étant arbitraire.

Les parts sont donc

$$p_1 = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$p_2 = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \text{ etc.}$$

Pour avoir x, on se sert de l'équation $p_1 = a + \frac{x-a}{n}$ qui donne

$$x = a(n-1)^2 + C(n-1).$$

Quant au nombre des parts, si on le nomme y, pour le trouver, on fera la somme des parts

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

. . . . . .

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^y.$$

Cette somme devant être égale à x, on a

$$a(n-1)^2 + C(n-1) = ay(n-1) + (n-1)C\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^y\right],$$

ou

$$a(n-1) = ay - C\left(\frac{n-1}{n}\right)^y.$$

Voilà donc une équation entre C et y. On pourra donner à y telle valeur ***entière positive*** qu'on voudra, cette équation donnera C ».

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

par M. J. NEUBERG.

(Fin; voir *Mathesis*, (2) I, p. 33, 67, 81.)

10. Pour simplifier l'écriture, nous désignons maintenant par X, Y, Z les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC; par X', Y', Z' les milieux des côtés opposés AD, BD, CD du quadrangle (fig. 1).

D'après un théorème connu, le lieu des centres des coniques passant par A, B, C, D, est une conique ayant pour diamètres les droites XX', YY', ZZ' et passant par les intersections P, Q, R des côtés opposés du quadrangle. Ce lieu porte le nom de ***conique des neuf points*** du quadrangle ABCD.

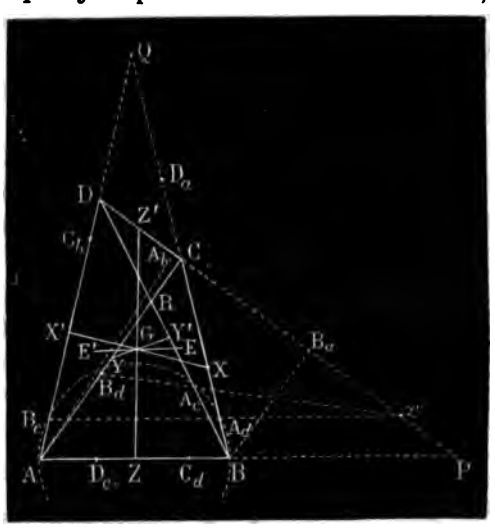


Fig. 1.

Il existe une hyperbole équilatère circonscrite au quadrangle. Son centre E est à l'intersection des cercles des neuf points des triangles ABC, BCD, CDA, DAB.

On peut remarquer le théorème suivant qui résulte immédiatement de ce qui précède et d'où Steiner a déduit une foule de propriétés curieuses des coniques (*Œuvres complètes*, t. II, p 689; *J. de Crelle*, t. LXVI, p. 237):

Soient XX', YY', ZZ' ***trois droites qui se divisent mutuellement en parties égales au point*** G. ***Les cercles*** XYZ, XY'Z', X'YZ', X'Y'Z ***passent par un même point*** E; ***les cercles*** X'Y'Z', X'YZ, XY'Z, XYZ' ***se coupent en un***

même point E', *symétrique de* E *par rapport à* E. *Les droites* XX', YY', ZZ', EE' *sont quatre diamètres d'une même conique.*

Les huit cercles considérés se partagent de quatre manières en deux groupes de quatre cercles passant par un même point; par exemple, les cercles EXY, EX'Y', E'XY', E'X'Y passent par Z et les cercles E'X'Y', E'XY, EX'Y, EXY', par Z'. La relation entre les quatre droites XX', YY', ZZ', EE' est donc symétrique.

Revenant au quadrangle ABCD, nous pouvons énoncer la propriété suivante, peu connue: *Dans un quadrangle complet* ABCD *les quatre cercles* X'Y'Z', XYZ', XY'Z, X'YZ *qui passent par les milieux de trois côtés ayant une extrémité commune passent par un même point* E'.

Il existe un second quadrangle A'B'C'D' dont les côtés ont les mêmes milieux que ceux de ABCD; les deux quadrangles sont symétriques par rapport à G. E' est le centre de l'hyperbole équilatère passant par A', B', C', D'.

D'après une remarque faite ci-dessus, les points X, X' sont les centres de deux hyperboles équilatères circonscrites aux deux quadrangles dont les milieux des côtés sont en Y, Y', Z, Z', E, E'.

11. Désignons par $A_dB_dC_d$, $B_aC_aD_a$, ... les triangles orthiques des triangles ABC, BCD, ... ou ce qui revient au même, par $D_aD_bD_c$, $A_bA_cA_d$, ... les triangles podaires des points D, A, ... par rapport aux triangles ABC, BCD... Les cercles circonscrits aux triangles orthiques (cercles des neuf points) des triangles ABC, BCD, ... passent par le centre E de l'hyperbole équilatère ABCD. Nous allons démontrer que *les cercles circonscrits aux podaires* $D_aD_bD_c$, ... *passent* également *par* E. Cette importante proposition peut être établie de différentes manières.

La démonstration suivante nous a été communiquée par M. Déprez. Il faut prouver que la circonférence $B_cB_dB_a$ passe par E ou que l'angle $B_dB_aB_c = B_dEB_c$. Or

$$B_dB_aB_c = B_dB_aB - B_cB_aB;$$

et les quadrilatères BB_dCB_a, BB_cDB_a étant inscriptibles, on a

$$\textit{angle}\ B_dB_aB = B_dCB, \quad \textit{angle}\ B_cB_aB = B_cDB,$$

de sorte que

$$B_dB_aB_c = B_dCB - B_cDB = ACB - ADB.$$

D'autre part, E est situé sur les cercles des neuf points des triangles

ACB, ADB; donc les quadrilatères EB_dZC_d, EB_cD_cZ sont inscriptibles, et l'on peut écrire

$$\textit{angle}\ B_dEB_c = B_dEZ - B_cEZ = B_dC_dZ - B_cD_cA.$$

En faisant encore intervenir les quadrilatères inscriptibles CB_dC_dB, DB_cD_cB, on trouve

$$\textit{angle}\ B_dC_dZ = ACB, \quad B_cD_cA = ADB;$$

d'où

$$\textit{angle}\ B_aEB_c = ACB - ADB = B_dB_aB_c.$$

12. Voici une démonstration due à John Casey; elle est fondée sur le théorème suivant dont une partie est déjà connue (*Mathesis*, (1) II, p. 226).

Soient D_1, D_2, D_3 ***les symétriques d'un point*** D ***par rapport aux côtés d'un triangle*** ABC. ***Les cercles*** BCD_1, CAD_2, ABD_3, $D_1D_2D_3$ ***passent par un même point*** D′ (fig. 2).

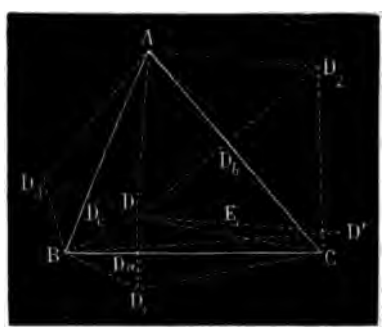


Fig. 2.

Pour prouver ce théorème, soit D′ le second point d'intersection des cercles ABD_3, BCD_1, et soient D_a, D_b, D_c les projections de D sur BC, CA, AB. Les quadrilatères inscriptibles AD_3BD', BD_1CD', AD_cDD_b, D_aDD_bC donnent

$$\textit{angle}\ D_3D'D_1 = D_3D'B + BD'D_1 = D_3AB + BCD_1 = BAD + DCB$$
$$= D_cD_bD + DD_bD_a = D_3D_2D + DD_2D_1 = D_3D_2D_1.$$

Donc la circonférence $D_1D_2D_3$ passe par D′.

Les faisceaux (D, ABC) et (D′, ABC) étant inversement égaux, DD′ est le diamètre d'une hyperbole équilatère passant par A, B, C. Les circonconférences $D_aD_bD_c$, $D_1D_2D_3$ ont évidemment pour centre de similitude le point D; donc puisque la seconde passe par D′, la première passe par le milieu E de DD′.

On en conclut que ***la circonférence circonscrite au triangle podaire d'un point*** D ***par rapport à un triangle*** ABC ***passe par le centre de l'hyperbole équilatère*** ABCD.

Il résulte de là que les quatre circonférences circonscrites aux triangles podaires des points A, B, C, D par rapport aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC passent par un même point.

Ce théorème comprend, comme cas particulier, la propriété suivante : *Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle* ABC *est le cercle des neuf points.* Car toutes ces hyperboles passent par l'orthocentre, et le cercle des neuf points est circonscrit au triangle podaire de l'orthocentre.

13. Pour abréger le discours, nous appellerons *cercle podaire* d'un point D par rapport à un triangle ABC le cercle circonscrit à son triangle podaire. Les cercles podaires d'un quadrangle ABCD sont les cercles podaires de chacun des sommets par rapport au triangle formé par les trois autres sommets; leurs centres, et ces cercles eux-mêmes seront désignés par ε_a, ε_b, ε_c, ε_d.

Soient D, F deux points inverses par rapport au triangle ABC. Ils ont même cercle podaire coupant le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points *d*, *f* dont l'un est le centre de l'hyperbole équilatère ABCD, l'autre celui de l'hyperbole équilatère ABCF.

Si le point D se meut sur une hyperbole équilatère fixe (D), circonscrite au triangle ABC, son inverse F parcourt un diamètre fixe OW de la circonférence ABC. Par conséquent, *lorsqu'un point* F *décrit un diamètre de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *son cercle podaire passe par un point fixe d, centre de l'hyperbole transformée isogonale de ce diamètre.*

Soient δ, φ les intersections de l'hyperbole (D) avec le diamètre OW; les cinq points A, B, C, δ, φ étant sur une même hyperbole, les points *d*, *f* coïncident, et *le cercle podaire des points* δ, φ *touche le cercle des neuf points du triangle* ABC. Cette proposition due à M. M'Cay généralise le théorème de Feuerbach; car on en déduit qu'un cercle inscrit ou exinscrit à ABC, touche le cercle des neuf points au centre de l'hyperbole équilatère qui passe par le centre du cercle inscrit ou exinscrit et par les points A, B, C. — Ces remarques nous ont été communiquées par MM. Casey et Sollertinsky.

14. On vient de voir que les cercles podaires ε_a, ε_b, ε_c, ε_d d'un quadrangle complet ABCD passent par un même point E. Nous allons donner de cette proposition une troisième démonstration, qui nous conduira à d'autres propriétés de ces cercles.

Soient A', B', C', D' les inverses (conjugués isogonaux) des points A, B, C, D par rapport aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC (fig. 3). Les angles D'BC, CBA' sont égaux à ABD, et les angles D'CB, BCA'

égaux à ACD; donc les points D′ et A′ sont symétriques par rapport à BC. Par conséquent, les côtés du quadrangle ABCD sont perpendiculaires sur les milieux des côtés opposés du quadrangle A′B′C′D′, et les points A, B, C, D sont les centres des cercles B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′; propriété que nous avons déjà rencontrée ci-dessus (n° 7).

Appelons x', y', z' les milieux des côtés du triangle A′B′C′, et x, y, z ceux des droites D′A′, D′B′, D′C′. Il résulte d'une propriété des points inverses que *les cercles podaires du quadrangle* ABCD *sont les cercles* $xy'z'$, $x'yz'$, $x'y'z$, xyz *qui passent par les milieux de trois côtés du quadrangle* A′B′C′D′ *ayant une extrémité commune.* Donc ils passent par un même point E (§ 10).

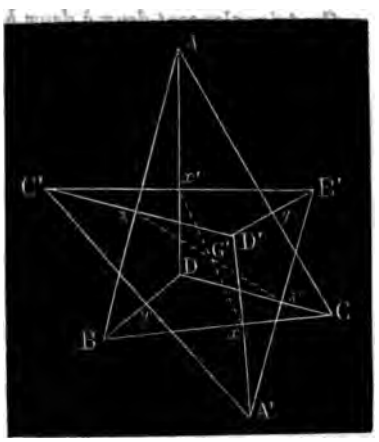


Fig. 3.

Soit G′ l'intersection des droites xx', yy', zz'. *Les cercles* ε_a, ε_b, ε_c, ε_d *sont les symétriques, par rapport au point* G′, *des cercles des neuf points des triangles* B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′.

On conclut de là que l'hyperbole équilatère qui passe par A, B, C, D et a pour centre E passe aussi par les symétriques des points A′, B′, C′, D′ par rapport à G′, ou que *les hyperboles* ABCD, A′B′C′D′ *sont symétriques par rapport à* G′.

15. D'autres conclusions intéressantes se déduisent de la figure 3.

Les cercles podaires ε_a, ε_b, ε_c, ε_d *d'un quadrangle* ABCD *se coupent deux à deux en six points* x, x', y, y', z, z' *situés sur les côtés du quadrangle et symétriques deux à deux par rapport à un même point* G′. Par exemple, les cercles ε_d, ε_a se coupent en x sur BC, et les cercles ε_b, ε_c en x' sur AD.

Le point E étant situé sur la circonférence xyz, le faisceau (E, xyz) est inversement égal à celui de trois parallèles aux côtés du triangle xyz; il est donc inversement égal au faisceau (D, ABC). Mais les lignes des centres $\varepsilon_a\varepsilon_d$, $\varepsilon_b\varepsilon_d$, $\varepsilon_c\varepsilon_d$ des cercles podaires sont perpendiculaires aux cordes communes Ex, Ey, Ez; donc le faisceau (ε_d, $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c$) est symétriquement égal au faisceau (D, ABC). En considérant de même les faisceaux (ε_a, $\varepsilon_b\varepsilon_d\varepsilon_c$), ..., on voit que le quadrangle $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$ est inversement semblable au quadrangle ABCD.

Le quadrangle $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$ est directement égal à celui qui a pour sommets les centres des cercles des neuf points de quadrangle A'B'C'D'. On en conclut aisément que *les centres des cercles des neuf points d'un quadrangle* ABCD *sont les sommets d'un quadrangle métapolaire à* ABCD.

16. Nous avons vu (8) que les triangles podaires

$$A_bA_cA_d, \quad B_aB_dB_c, \quad C_dC_aC_b, \quad D_cD_bD_a$$

d'un quadrangle ABCD sont semblables.

Ces triangles sont deux à deux homologiques, les centres d'homologie étant les points d'intersection x, x', y, y', z, z' *des cercles circonscrits*. En effet, l'hexagone $A_cBA_dB_cAB_d$ étant inscriptible dans la circonférence de diamètre AB, les côtés opposés (A_cB, B_cA), (BA_d, AB_d), (A_dB_c, B_dA_c) se coupent en trois points D, C, z, qui sont en ligne droite. Or, si *deux triangles semblables sont homologiques, ils sont homothétiques ou bien les centres de similitude et d'homologie sont les deux points d'intersection des circonférences circonscrites*(*). Par conséquent, le point de concours z des droites A_dB_c, B_dA_c est l'un des points d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $A_bA_cA_d$, $B_aB_dB_c$; le second point d'intersection E de ces cercles est le centre de similitude de ces triangles. Ainsi :

Les quatre triangles podaires d'un quadrangle complet ont deux à deux pour centre de similitude le point de rencontre E *des cercles circonscrits.*

Il résulte de là que quatre points homologues des triangles podaires sont les sommets d'un quadrangle de forme constante. En particulier, *les quadrangles* $A_bB_aC_dD$, $A_cB_dC_aD_b$, $A_dB_cC_bD_a$, $\varepsilon_a\varepsilon_c\varepsilon_b\varepsilon_d$ *sont semblables entre eux et ont pour centre de similitude le point* E.

Les quadrangles ABCD, $A_bB_aC_dD_c$ sont inversement semblables; leur point double est P, leurs droites doubles sont les bissectrices des angles formés par AB et CD, leur rapport de similitude égale séc (AB, CD). De même, les quadrangles $A_cB_dC_aD_b$ et $A_dB_cC_bD_a$ sont inversement semblables à ABCD, le point double étant R ou Q, et une droite double, la bissectrice de l'angle ARB ou AQB. On voit de nouveau que le quadrangle $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$ est inversement semblable à ABCD.

(*) M. Sollertinsky s'est servi de ce lemme pour établir les propositions du n° 16. L'article de M. Terrier (N. A. M, 1876, p. 108) renferme une foule de propriétés des quadrangles, dont nous ne reprenons ici qu'une partie ; quelques énoncés sont difficiles à comprendre. — On peut démontrer directement que l'angle des droites A_dB_c, A_cB_d est égal à chacun des angles $B_dB_aB_c$, $A_cA_bA_d$.

Désignons par M le point qui dans le quadrangle ABCD, correspond au point E considéré dans le quadrangle $A_bB_aC_dD_c$. Les droites homologues MP, εP sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle APD.

Nous concluons de là que *les droites symétriques de* EP, EQ, ER *par rapport aux bissectrices des angles* APD, AQB, ARB *concourent en un même point* M. Les distances de E aux points ε_a, ε_b, ε_c, ε_d, sont égales aux rayons des cercles podaires, et par suite inversement proportionnelles à R_a, R_b, R_c, R_d (n° 8); donc *il existe dans le plan d'un quadrangle* ABCD *un point* M *dont les distances aux sommets sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles* BCD, CDA, DAB, ABC.

17. Considérons l'hexagone inscriptible $A_cAA_dB_cBB_d$. Les côtés opposés (A_cA, B_cB), (AA_d, BB_d), (A_dB_c, B_dA_c) se coupent en trois points qui sont en ligne droite; autrement dit, les orthocentres H_c,H_d des triangles ABD, ABC sont en ligne droite avec le point d'intersection z des cercles podaires ε_a, ε_b. Donc les côtés du quadrangle complet $H_aH_bH_cH_d$ passent, respectivement, par les secondes intersections des cercles podaires.

18. Voici encore un théorème d'une extrême élégance, qui nous a été communiqué par M. Sollertinsky :

Les centres ω_a, ω_b, ω_c, ω_d *des cercles des neuf points des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC *sont les centres des cercles circonscrits aux triangles* $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$, $\varepsilon_c\varepsilon_d\varepsilon_a$, $\varepsilon_d\varepsilon_a\varepsilon_b$, $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c$ *qui ont pour sommets les centres des cercles podaires du quadrangle* ABCD.

En effet, ces huit cercles passent par le même point E. Les cercles ω_a et ε_b circonscrits respectivement aux triangles $B_aC_aD_a$ et $B_aB_cB_d$ ont pour corde commune EB_a; donc la droite $\omega_a\varepsilon_b$ est perpendiculaire au milieu de EB_a. De même $\omega_a\varepsilon_c$ est perpendiculaire à EC_a, et $\omega_a\varepsilon_d$ à ED_a. Par suite, le faisceau (ω_a, $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$) est inversement égal au faisceau de trois parallèles ou perpendiculaires aux côtés du triangle $B_aC_aD_a$. Mais les rayons O_aB, O_aC, O_aD du cercle circonscrit au triangle BCD sont perpendiculaires aux côtés du triangle orthique $B_aC_aD_a$ de BCD; donc les faisceaux (ω_a, $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$), ($O_a$, BCD) sont inversement égaux et comme les triangles $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$, BCD sont inversement semblables, ω_a est le centre du cercle $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$.

19. Lorsque le quadrangle ABCD est inscriptible, les cercles podaires sont remplacés par des droites de Simson. Pour ce cas particulier, nous renvoyons aux N. A. M., 1869, (2), VIII, pp. 175 et 317.

QUESTIONS D'EXAMEN.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Composition de Mathématiques.

(5 juin, de 7 h. à 11 h.)

On donne une parabole P; on porte à partir de chacun de ses points et dans le même sens sur une parallèle à une direction fixe Δ des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de P.

1° Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs : montrer qu'il se compose de deux paraboles P_1 et P_2, et donner la raison de ce dédoublement.

2° Démontrer que les axes des paraboles P_1, P_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre, qu'ils pivotent autour d'un même point indépendant de la direction Δ et que la somme des carrés des paramètres des paraboles est constante.

3° Trouver et construire le lieu décrit par le sommet des paraboles P_1 et P_2 lorsqu'on fait varier la direction Δ.

On prendra comme axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de P; on désignera par p son paramètre et par θ l'angle de Δ avec l'axe des x.

Solution. 1° Soit $M(x_0, y_0)$ un point quelconque de P; sur une parallèle à Δ par M prenons $MN_1 = MN_2 = MF$. On trouve aisément pour les coordonnées de N_1

$$x - x_0 = \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)\cos\theta, \quad y - y_0 = \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)\sin\theta; \qquad (1)$$

celles de N_2 s'obtiennent par le changement de θ en $\theta + \pi$.

Des égalités (1) on tire

$$x_0 = \frac{x - \frac{1}{2}p\cos\theta}{1 + \cos\theta}, \quad y_0 = y - \frac{x + \frac{1}{2}p}{1 + \cos\theta}\sin\theta;$$

d'où, à cause de $y_0^2 = 2px_0$, l'équation du lieu décrit par N_1 :

$$\left(y - \frac{x + \frac{1}{2}p}{1 + \cos\theta}\sin\theta\right)^2 = 2p\left(\frac{x - \frac{1}{2}p\cos\theta}{1 + \cos\theta}\right). \qquad (2)$$

La forme de ce résultat montre que le lieu est une parabole P_1 dont une tangente et le diamètre conjugué ont pour équations

$$x = \tfrac{1}{2}p\cos\theta, \quad y = (x + \tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (3)$$

L'axe de P_1 fait donc avec l'axe des x l'angle $\frac{1}{2}\theta$.

Si dans les égalités (2) et (3) on remplace θ par $\theta + \pi$, on voit que N_2 décrit une parabole P_2 dont l'axe fait avec l'axe des x l'angle $\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\pi$. Les axes des deux courbes P_1 et P_2 sont donc rectangulaires.

A deux points M, M′ de la parabole P situés sur une même ordonnée, correspondent deux points N_1, N_1' de P_1 ayant même abscisse. Si M et M′ se confondent avec le sommet A de P, N_1 et N_1' se confondent en un seul point n_1; il en résulte que la tangente en n_1 à la parabole P_1 est verticale. C'est la tangente trouvée ci-dessus; le diamètre correspondant, représenté par la seconde des équations (3) passe constamment par le pied de la directrice de P.

2° Pour trouver l'axe de P_1, nous nous servons de la méthode de Salmon. A cet effet, nous écrivons l'équation (2) ainsi :

$$\left[y-(x+\tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\lambda\right]^2 = 2p\,\frac{x-\frac{1}{2}p\cos\theta}{1+\cos\theta}+2\lambda\left[y-(x+\tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right]+\lambda^2,$$

et nous déterminons λ par la condition que la tangente représentée par l'équation

$$2p\,\frac{x-\frac{1}{2}p\cos\theta}{1+\cos\theta}+2\lambda\left[y-(x+\tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right]+\lambda^2=0$$

soit perpendiculaire à l'axe ou ait pour coefficient angulaire $-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\theta$. Nous aurons $\lambda = \frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$; par conséquent l'équation (2) est équivalente à celle-ci :

$$[y - x\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta]^2 = p\left[y\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta + x + p\,\frac{1-3\cos^2\frac{1}{2}\theta}{4\cos^2\frac{1}{2}\theta}\right]$$

ou

$$\left[y\cos\frac{\theta}{2}-x\sin\frac{\theta}{2}\right]^2 = p\cos\frac{\theta}{2}\left[y\sin\frac{\theta}{2}+x\cos\frac{\theta}{2}\right]+\frac{p^2}{4}\left(1-3\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Posant

$$Y = y\cos\frac{\theta}{2}-x\sin\frac{\theta}{2},\quad X = y\sin\frac{\theta}{2}+x\cos\frac{\theta}{2},$$

on aura pour l'équation de P_1

$$Y^2 = pX\cos\frac{\theta}{2}+\frac{p^2}{4}\left(1-3\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

L'axe a donc pour équation $Y = 0$; on voit qu'il passe constamment

par l'origine. Les paramètres $2p_1$, $2p_2$ des paraboles P_1, P_2 ont pour valeurs

$$2p_1 = 2p\cos\frac{\theta}{2}, \quad 2p_2 = 2p\sin\frac{\theta}{2}; \qquad \text{d'où} \qquad p_1^2 + p_2^2 = p^2.$$

3° Les coordonnées du sommet de P_1 satisfont aux équations

$$y\cos\frac{\theta}{2} - x\sin\frac{\theta}{2} = 0, \quad \cos\frac{\theta}{2}\left(y\sin\frac{\theta}{2} + x\cos\frac{\theta}{2}\right) + \frac{p}{4}\left(1 - 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Éliminant θ, on trouve

$$(8x - p)(x^2 + y^2) = 3p(x^2 - y^2), \quad \text{ou} \quad y^2 = x^2\frac{\frac{4}{3}p - x}{x + \frac{1}{4}p};$$

on voit par cette équation que la forme du lieu des sommets des paraboles P_1 et P_2 se rapproche sensiblement de celle d'une strophoïde droite.

Solution géométrique. Nous ne faisons qu'indiquer la méthode. Soit MQ la perpendiculaire abaissée de M sur la directrice δ de P. Comme $MQ = MF = MN_1 = MN_2$, les triangles isoscèles MQN_1, MQN_2 sont de forme constante. Donc pour passer de P à P_1 ou P_2, on fait tourner d'un angle constant autour de leur pied les ordonnées de P relatives à δ. Cette transformation change les diamètres et les tangentes de P en des diamètres et des tangentes de P_1 ou P_2.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 691.

(Voir *Mathesis*, (1), X, p. 216.)

Un disque elliptique se déplace en restant toujours tangent à une droite fixe Ox ***en un point donné*** O. ***Quel est le lieu géométrique du centre de courbure de l'ellipse au point où elle est rencontrée par la normale fixe*** Oy?

(H. Brocard.)

Solution par M. V. Jamet (Marseille). Soit

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + y^2 - 2\lambda y = 0,$$

l'équation de l'ellipse rapportée aux deux droites Ox, Oy. Cherchons d'abord les relations qui doivent exister entre α, β, λ pour que cette ellipse soit de grandeur constante. Si elle était rapportée à deux axes

parallèles aux axes primitifs et passant par son centre, son équation serait :

$$\frac{-\beta^2+\alpha}{\alpha\lambda^2}\cdot(\alpha x^2+2\beta xy+y^2)-1=0;$$

si elle était rapportée à ses axes de symétrie, son équation serait

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

Si l'on fait

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=H,\quad \frac{1}{a^2b^2}=K, \tag{a}$$

on trouve, en vertu des propriétés des invariants :

$$\frac{(-\beta^2+\alpha)(\alpha+1)}{\alpha\lambda^2}=H,\quad \frac{(\alpha-\beta^2)^2}{\alpha^2\lambda^4}=K. \tag{b}$$

On en conclut :

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{K}{H^2}}\cdot\frac{(\alpha+1)^{\frac{2}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}},\quad \beta=\pm\frac{1}{H}\sqrt{H^2\alpha-K(\alpha+1)^2}.$$

En outre, l'équation de la normale à la courbe (1), au point x, y, est :

$$(\beta x+y-\lambda)(X-x)-(\alpha x+\beta y)(Y-y)=0,$$

X, Y, désignant les coordonnées courantes ; et cette normale touche son enveloppe en un point situé sur la droite représentée par l'équation :

$$\frac{\beta(X-x)-\beta x-y+\lambda-\alpha(Y-y)}{\alpha x+\beta y}=\frac{X-x-\beta(Y-y)+\alpha x+\beta y}{\beta x+y-\lambda}.$$

Si, dans ces deux dernières équations, on fait $x=0$, $y=2\lambda$, on voit que les coordonnées X, Y, d'un point du lieu remplissent les conditions suivantes :

$$X-2\beta(Y-2\lambda)=0,\quad \frac{\beta X-\lambda-\alpha(Y-2\lambda)}{2\beta}=X-\beta(Y-2\lambda)+2\beta\lambda.$$

On en conclut :

$$X=-\frac{2\beta}{\alpha}\lambda,\quad Y=\frac{2\alpha-1}{\alpha}\lambda,$$

puis, en vertu des formules (b),

$$X=\pm\frac{2}{H^2}\sqrt{\frac{K}{H}}\sqrt{-K(\alpha+1)^2+H^2\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$Y=\pm\frac{1}{H}\sqrt{\frac{K}{H}}(2\alpha-1)\cdot\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, les deux coordonnées de chaque point du lieu s'expriment par des fonctions irrationnelles d'un même paramètre α. Je dis qu'on peut aussi les exprimer en fonction rationnelle d'un même paramètre u, et de la racine carrée d'un polynôme bicarré par rapport à u; de telle sorte que la courbe actuellement étudiée appartient à une catégorie de courbes signalées par Clebsch (*J. de Crelle*, t. 64, p. 210).

Posons :

$$\frac{\alpha+1}{\alpha}=u^2, \quad \text{ou bien} \quad \alpha=\frac{1}{u^2-1},$$

les formules précédentes deviendront :

$$X=\pm\frac{2}{H^2}\sqrt{\frac{K}{H}}\sqrt{-Ku^4+H(u^2+1)}\cdot\frac{u^3}{u^2-1},$$

$$Y=\pm\frac{1}{H}\sqrt{\frac{K}{H}}\cdot(3-u^2)\cdot\frac{u^3}{u^2-1},$$

et enfin, en vertu des formules (a),

$$\left.\begin{aligned} X&=\pm\frac{2a^3b^3}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}\sqrt{-\left[u^2-a^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]\left[u^2-b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]}\frac{u^3}{u^2-1}\\ Y&=\pm\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(3-u^2)u^3}{u^2-1}. \end{aligned}\right\}(c)$$

Ces formules montrent que la courbe se compose de deux boucles fermées, symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox, et admettant, l'une et l'autre, l'axe Oy pour axe de symétrie. Si l'on a $\frac{b^2}{a^2}<\frac{1}{2}$, les deux boucles se coupent mutuellement en deux points situés sur Ox, à égale distance du point O; si $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$, elles se touchent à l'origine; si $\frac{b^2}{a^2}>\frac{1}{2}$, elles n'ont aucun point commun.

Mais nous pensons que si l'étude de cette courbe présente quelque intérêt, cet intérêt réside surtout dans la recherche des intégrales auxquelles elle donne naissance.

Soit $f(X, Y)$ une fonction rationnelle des coordonnées d'un point mobile sur cette courbe. L'intégrale

$$\int f(X, Y)\,dY$$

se transformera, par les formules (*c*), en une somme d'intégrales algébriques, logarithmiques ou elliptiques; je dis que *ces dernières seront toutes de troisième espèce.*

En effet, supposons que la fonction $f(X, Y)$ se transforme comme il suit :

$$f(X, Y) = \frac{P + Q\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}{S + T\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}},$$

où

$$\alpha^2 = a^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \quad \beta^2 = b^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

P, Q, S, T désignant des fonctions entières de u. En multipliant les deux termes de la fraction précédente par

$$S - T\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)},$$

on parvient à la mettre sous la forme

$$U + V\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)},$$

U, V désignant des fonctions rationnelles de u : nous nous occuperons exclusivement de l'intégrale

$$\int V\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}\, dY.$$

La fonction V se décompose en un polynôme entier $\Sigma A_k u^k$, et en une somme de fractions simples de la forme

$$\Sigma \frac{B_k}{(u - a)^k}.$$

Mais l'intégrale

$$\int \frac{dY}{(u - a)^k}$$

est égale à

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots k} D_z^{k-1} \int \frac{dY}{(u - z)}, \quad \text{pour} \quad z = a.$$

Nous sommes donc ramenés à étudier 1° les intégrales de la forme

$$\int u^k . \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}\, dY. \tag{A}$$

2° les intégrales de la forme

$$\int \frac{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}\, dY}{u - a}. \tag{B}$$

1° A un facteur constant près, la différentielle de Y est égale à

$$u^2 . \frac{9 + 8u^2 - 3u^4}{(u^2-1)^2} du,$$

de sorte que toute intégrale de la forme (A) se transforme aisément en une somme d'intégrales de la forme suivante :

$$\int \frac{u^{2r} du}{(u^2-1)^2 \sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}, \qquad (C)$$

ou de la forme :

$$\int \frac{u^{2r+1} du}{(u^2-1)^2 \sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}.$$

Dans ce dernier cas, on revient aux fonctions élémentaires, en prenant u^2 pour variable indépendante.

Considérons l'identité

$$d\left(\frac{u^q \sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}{u^2-1}\right) =$$

$$\frac{(q-4)u^{q+5} - (q+3)(\alpha^2+\beta^2)u^{q+3} + [(q+1)(\alpha^2+\beta^2) + (q+2)\alpha^2\beta^2]u^{q+1}}{(u^2-1)^2 \sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}} du.$$

Intégrons les deux membres et remplaçons q par $2r-5$, nous trouvons que toute intégrale de la forme (C) est la somme de trois termes, dont l'un est une fonction algébrique de u, et dont les deux autres sont, à des facteurs numériques près, des intégrales de la même forme, où r est remplacé, respectivement, par $r-1$ et par $r-2$. Le calcul de l'intégrale (C) se ramène donc ainsi, de proche en proche, à celui des intégrales

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2-1)^2 \sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}, \quad \int \frac{du}{(u^2-1)^2 \sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}, \qquad (D)$$

qui se rattachent comme il suit à l'intégrale elliptique de troisième espèce. La première des deux intégrales ci-dessus est égale à

$$\int \frac{du}{(u^2-1)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}} + \int \frac{du}{(u^2-1)^2 \sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}. \qquad (E)$$

Posons

$$F(z) = \int \frac{du}{(u^2-z)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}$$

la fonction (E) est égale à

$$F(z)+F'(z), \quad \text{pour} \quad z=1.$$

Quant à la fonction (D), elle est égale à $F'(z)$, pour $z=1$.

2° L'intégrale (B) est égale à une somme de termes de la forme :

$$\int \frac{u^{2p}du}{(u^2-1)^2(u-a)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}, \qquad (F)$$

multipliés chacun par un coefficient constant.

Or :

$$\frac{u^{2p}}{u-a}=u^{2p-1}+au^{2p-2}+\cdots+a^{2p-1}+\frac{a^{2p}}{u-a}.$$

Ceci permet de transformer l'intégrale (F) en une somme d'intégrales de la forme (A), augmentée du terme suivant :

$$a^{2p}\int \frac{du}{(u^2-1)^2(u-a)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}. \qquad (G)$$

En outre :

$$\frac{1}{(u^2-1)^2(u-a)}=\frac{au^2+2au+1}{2(1-a^2)(u^2-1)^2}+\frac{1}{(a^2-1)^2(u-a)}.$$

Donc enfin l'intégrale (G) se transforme en une somme d'intégrales de la forme (A), augmentée de l'intégrale elliptique de troisième espèce

$$\int \frac{du}{(u-a)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}$$

multipliée par un facteur constant.

Bessan (Hérault), 14 septembre 1890.

×Question 701.

(Voir *Mathesis*, (2), I, pp. 32 et 79.)

Soient : ABCD *un rectangle inscrit dans la circonférence* O ; E *le milieu de* AD ; G *le point de rencontre de la circonférence avec la droite* CE ; F *un point quelconque de la diagonale* DB *et* K *sa projection sur* AD ; I *le milieu du segment* AK.

1° *L'angle* GIF = GAB. 2° *Si par* F *on mène une parallèle à* AD, *rencontrant* CE *en* N *et* BE *en* M, *les cinq points* F, N, D, G, I *sont sur une même circonférence.* 3° *Si* GF *rencontre en* P *la circonférence* O, *le quadrila-*

tère BMFP *est inscriptible et les points* A, M, P *sont sur une parallèle à* FI. 4° *Les droites* FI, AB *se rencontrent sur la circonférence circonscrite au triangle* AIG. (A. C.)

Solution par MM. Cristesco, Mandart *et* Déprez. 1° Soit Q le point de rencontre de MN avec AB. On trouve aisément que FQ = AK, FM = MQ; par conséquent, MF = MQ = KI = IA; MI est donc parallèle à FK, AM à FI. Le triangle AGE, semblable à CDE, est semblable à BAE, et comme

$$AI : AE = MF : ED = BM : BE$$

les triangles partiels GAI, GIE sont semblables à ABM, AME. Il en résulte que l'angle GID = AME; par suite,

$$\textit{angle}\ GIF = GIE + EIF = AME + EAM = \pi - AEM = AEN,$$

et comme les angles GAB, AEC ont même mesure, les angles GIF, GAB sont égaux.

2° On vient de trouver

$$\textit{angle}\ GIF = IEN = \pi - ENF;$$

donc les points G, I, F, N, sont concycliques. On a aussi

$$\textit{angle}\ GIF = GAB = \pi - GDB;$$

par suite, la circonférence GIFN passe également par D(*).

3° L'angle

$$EMN = ENM = BCG = BPG;$$

donc le quadrilatère BMFP est inscriptible.

L'angle

$$PMF = PBF = PAD = \pi - AMN;$$

donc AM et MP ne forment qu'une seule ligne droite.

4° Soit H le point de rencontre de IF avec AB. On a

$$\textit{angle}\ AGI = BAM = AHI;$$

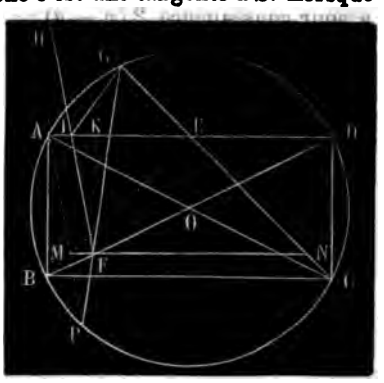
donc les points A, H, G, I appartiennent à une même circonférence.

Remarques par M. Liénard. La droite FI partage BD et AE en parties proportionnelles; car si MN coupe AB en Q, on a

$$MF = MQ = AI, \quad \text{d'où} \quad BF : BD = MF : ED = AI : AE.$$

(*) L'énoncé portait par erreur que FA est une tangente. Si l'on place F en B, FA coïncide avec BA, et la circonférence FIGDN avec la circonférence donnée ; or celle-ci ne touche pas BA.

Donc IF enveloppe une parabole S tangente aux droites BD, AD. AB est une position particulière de IF; donc c'est une tangente à S. Lorsque F est en D, I est en E; par suite S touche AD en E.



Le cercle circonscrit à un triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer. Pour la parabole S, deux triangles circonscrits sont DBA, DFI; un troisième triangle a pour côtés BD, ED, ED, E étant le point de contact de AD. Donc les cercles ABD, IFD et le cercle passant par E et D et touchant BD en D se coupent au foyer de S. Le premier et le dernier de ces cercles se coupent en G, sur la droite CE; donc G est le foyer de S, et la circonférence DIF passe par G.

Il serait facile de déduire de là les propositions contenues dans la question 701.

×Question 710.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 80.)

Si la relation

$$(-r_1+r_2+r_3)(r_1-r_2+r_3)(r_1+r_2-r_3)=-8r_1r_2r_3$$

existe entre les rayons des cercles exinscrits à un triangle ABC, ***le périmètre de ce triangle est égal à*** $r_1+r_2+r_3$. (LEUDESDORF.)

Solution par MM. LEMOINE, DELAHAYE, EMMERICH, DECAMPS, DÉPREZ, RUSSO, CRISTESCO, DENYS, FRANÇOIS, MANDART et M^lle^ DE HAAS. Posons $r_1+r_2+r_3=\delta$; la relation donnée s'écrit

$$(\delta-2r_1)(\delta-2r_2)(\delta-2r_3)=-8r_1r_2r_3.$$

Effectuant le produit et observant que $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=p^2$ (*), on obtient $\delta^2=4p^2$; ce qu'il fallait démontrer.

(*) Cette relation se déduit facilement des formules $r_1=\frac{S}{p-a}$, etc., ou de $r_1=p\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}A$, etc. — Les différentes solutions qui nous ont été adressées présentent quelques variantes peu importantes.

Remarque I. On démontrerait de même que la relation

$$(r + r_2 + r_3)(r + r_2 - r_3)(r - r_2 + r_3) = 8rr_2r_3$$

a pour conséquence $2(p - a) = r_2 + r_3 - r$. (Lemoine.)

Remarque II. La relation proposée peut être écrite ainsi

$$(r_1 + r_2 + r_3)[(r_1 + r_2 + r_3)^2 - 4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)] = 0.$$

Elle se décompose en

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$
$$(r_1 + r_2 + r_3)^2 - 4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) = 0;$$

la dernière égalité est équivalente à

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0.$$

Si l'on considère r_1, r_2, r_3 comme les coordonnées barycentriques d'un point, l'équation proposée exprime que ce point est à l'infini ou sur l'ellipse qui touche les côtés du triangle de référence en leurs milieux. (Déprez.)

Remarque III. Si entre les rayons sphériques des cercles exinscrits à un triangle sphérique ABC, on a la relation

$$(-\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3)(\operatorname{tg} r_1 - \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3)(\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - \operatorname{tg} r_3) + 2 \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3 = 0,$$

on a également

$$\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 = 2 \sin p \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} R}. \quad \text{(Déprez.)}$$

Question 711.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 80.)

On considère une hyperbole équilatère H ***et le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence des normales issues d'un même point. Démontrer que les circonférences décrites sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres passent par le centre de*** H ***et en ce point, sont mutuellement tangentes.*** (de Longchamps.)

Solution par M. Liénard. Soit $x^2 - y^2 = a^2$ l'équation de l'hyperbole, et soient A, B, C, D les points d'incidence des normales issues du point P(X, Y); on sait que ces points sont sur une seconde hyperbole représentée par

$$2xy - xY - yX = 0.$$

Le système des cordes AB, CD communes aux deux hyperboles a une équation de la forme

$$\lambda(x^2 - y^2 - a^2) + \mu(2xy - xY - yX) = 0. \qquad (1)$$

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2) sont les coordonnées des pôles M, N de ces cordes, l'équation (1) doit être identique avec

$$(xx_1 - yy_1 - a^2)(xx_2 - yy_2 - a^2) = 0.$$

D'où les égalités de condition

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2 = \lambda, \quad y_1y_2 = -\lambda, \quad x_1y_2 + x_2y_1 = -2\mu, \\ a^2(x_1 + x_2) = \mu Y, \quad a^2(y_1 + y_2) = -\mu X, \quad a^2 = -\lambda. \end{aligned}\right\} (2)$$

D'autre part, la circonférence décrite sur MN comme diamètre a pour équation

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2,$$

Si elle passe par l'origine, on a

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \qquad (3)$$

et le coefficient angulaire de la tangente en ce point est égal à

$$-\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

Au moyen des relations (2), on constate immédiatement que l'égalité (3) est vérifiée et que la tangente en O a pour coefficient angulaire (Y : X) ou coïncide avec OP.

Voici une démonstration un peu différente. Les points d'incidence A, B, C, D des normales abaissées d'un point P à une hyperbole équilatère (H) sont situés sur une seconde hyperbole équilatère (H′) passant par le centre O de (H) et par le point P, et ayant des asymptotes parallèles aux axes de (H). Ces points étant situés à la fois sur deux hyperboles équilatères sont les sommets d'un quadrangle orthogonal ABCD ; c'est-à-dire que AB et CD, AC et BD, AD et BC sont des droites rectangulaires.

Soient M, N les pôles de AB, CD par rapport à (H). Les diamètres OM, ON conjugués avec les cordes rectangulaires AB, CD sont également rectangulaires ; donc la circonférence décrite sur MN comme diamètre passe par O. Le centre O est aussi situé sur la droite joignant

les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les tangentes aux points A, B, C, D (Théorème de Newton). Ceci suffit pour démontrer complètement le théorème.

Autre solution, analytique, par M. DECAMPS.

×Question 712.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soient H *l'orthocentre du triangle* ABC, M *un point quelconque de son plan et* H_a, H_b, H_c, *les orthocentres des triangles* AMH, BMH, CMH. *Démontrer que les circonférences circonscrites aux triangles* AMH_a, BMH_b, CMH_c *passent par un même point.* (MEURICE.)

Solution par M^lle^ DE HAAS *et* M. SOLLERTINSKY. Les circonférences AMH_a, BMH_b, ABC sont les symétriques des circonférences AMH, BMH, ABH par rapport aux côtés du triangle ABM; elles concourent donc en un même point H_1 (jumeau de H par rapport au triangle ABM). De même, les circonférences BMH_b, CMC_c, ABC passent par un même point; etc.

×Question 715(*).

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Si n *est impair et premier avec* 5, *le polynôme*

(A) $$x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x + 1$$

est divisible par

(B) $$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$ (SHARP.)

Solution par MM. EMMERICH, GREENSTREET et SOONS. Le quotient de ces polynômes peut être écrit ainsi

$$\frac{x^{5n}+1}{x^n+1} : \frac{x^5+1}{x+1} = \frac{(x^{5n}+1)(x+1)}{(x^n+1)(x^5+1)}. \qquad (1)$$

Si n est impair, $x^{5n}+1$ est à la fois divisible par x^n+1 et x^5+1; mais ces derniers binômes n'ont pas d'autre facteur commun que $x+1$, pourvu que n soit premier avec 5. Le facteur $x+1$ entrant deux fois

---

(*) Question 8951 de l'*Educational Times*. Dans la transcription de l'énoncé les mots « et premier avec 5 » avaient été oubliés. (J. N.)

dans le numérateur de la fraction (1), celle-ci se réduit à un polynôme entier.

Solution par M. Joachimescu. Les racines de l'équation

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

sont

$$x = \cos\frac{\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}, \quad x = \cos\frac{3\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5}. \qquad (2)$$

Le polynôme (A) peut s'écrire ainsi

$$x^{2n}\left[\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - 1\right];$$

la quantité entre crochets, pour les valeurs (2), se réduit à

$$4\cos^2\frac{n\pi}{5} - 2\cos\frac{n\pi}{5} - 1, \quad 4\cos^2\frac{3n\pi}{5} - 2\cos\frac{3n\pi}{5} - 1. \qquad (3)$$

Le polynôme (B) étant mis sous la forme

$$x^2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right],$$

on trouve pour la quantité entre crochets

$$4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1, \quad 4\cos^2\frac{3\pi}{5} - 2\cos\frac{3\pi}{5} - 1, \qquad (4)$$

expressions qui sont nulles, puisque les valeurs (2) sont les racines de l'équation

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Or, les expressions (3) se ramènent aux quantités (4) lorsque n est un nombre impair, premier avec 5. Donc, etc.

Remarque. Plus généralement, si m est un nombre impair premier avec n, le polynôme

$$x^{(m-1)n} - x^{(m-2)n} + \cdots + 1$$

est divisible par

$$x^{m-1} - x^{m-2} + \cdots + 1. \quad \text{(Emmerich et Greenstreet.)}$$

×Question 718.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Résoudre le système

$$xyz + x - y - z = a(1 + yz - xz - xy), \quad (1)$$
$$xyz + y - z - x = b(1 + xz - xy - yz), \quad (2)$$
$$xyz + z - x - y = c(1 + xy - yz - zx). \quad (3)$$

Solution par MM. MANDART *et* EMMERICH. L'équation (1), peut s'écrire, successivement,

$$x(yz+1) - (y+z) = a(1+yz) - ax(y+z),$$
$$(x-a)(1+yz) = (1-ax)(y+z), \quad \frac{1+yz}{y+z} = \frac{1-ax}{x-a},$$
$$\frac{1+yz+y+z}{1+yz-y-z} = \frac{1-ax+x-a}{1-ax-x+a}, \quad \frac{(1+y)(1+z)}{(1-y)(1-z)} = \frac{(1+x)(1-a)}{(1-x)(1+a)},$$

d'où pour les trois équations proposées :

$$\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-a}{1+a} = \frac{(1+y)^2}{(1-y)^2}\cdot\frac{1-b}{1+b} = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}\cdot\frac{1-c}{1+c}.$$

Soit ρ la valeur commune des quatre rapports ; en faisant le produit des trois derniers, on trouve

$$\rho^3 = \rho^2\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}, \quad \rho = \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}.$$

Ensuite

$$\frac{1+x}{1-x} = \pm\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{(1+b)(1+c)}}, \quad \text{etc.}$$

Solution par MM. DÉPREZ *et* CRISTESCO. Les équations (1) et (2) peuvent prendre la forme

$$(x-y)(1+az) = (1-xy)(a+z), \quad (y-x)(1+bz) = (1-xy)(b+z),$$

d'où par division

$$\frac{1+az}{1+bz} + \frac{a+z}{b+z} = 0, \quad \text{ou} \quad z^2 + \frac{2(ab+1)}{a+b} + 1 = 0, \quad \text{etc.}$$

Solution par M. BROCARD. L'élimination de z entre les deux dernières équations donne, après suppression du facteur $y^2 - 1$,

$$(b+c)x^2 + 2(1+bc)x + (b+c) = 0 ; \quad (4)$$

par analogie

$$(c+a)y^2+2(1+ca)y+(c+a)=0, \text{ etc.}$$

REMARQUES. I. Les valeurs de b et c déduites de (2) et (3) doivent évidemment satisfaire à l'équation (4); donc si on les désigne par $\frac{M}{N}, \frac{R}{S}$, on a, identiquement

$$(1+x^2)(MS+RN)=-2x(MR+MS);$$

c'est ce que l'on vérifie aisément, car on trouve

$$MS+RN=-2x(1-y^2)(1-z^2),\ MR+NS=(1+x^2)(1-y^2)(1-z^2).$$

Le type de polynôme $(1-y^2-z^2+y^2z^2)$ se retrouve pareillement dans le discriminant de l'équation (4):

$$(1+bc)^2-(b+c)^2 \quad \text{ou} \quad (1-b^2)(1-c^2).$$

Pour que ce discriminant soit un carré parfait, on peut prendre

$$1+bc=p^2+q^2, \quad b+c=2pq;$$

alors on trouvera $x=-\frac{p}{q}$ ou $-\frac{q}{p}$.

On pouvait prévoir que chaque inconnue a des valeurs réciproques; en effet, les équations (1), (2), (3) ne changent pas quand on remplace x, y, z, a, b, c par $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, etc. (H. BROCARD.)

II. Les inconnues x, y, z seront réelles si a, b, c sont égaux à des sinus, ou à des sécantes, c'est-à-dire si a^2, b^2, c^2 sont tous trois inférieurs, ou tous trois supérieurs à l'unité. (CRISTESCO.)

MM. DENYS et DECAMPS ont également donné de bonnes solutions de la question 718.

×Question 719.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Si A, B, C *sont les angles d'un triangle*

$$\Sigma \sin^2(A-B)-\Sigma \sin(A-B)\sin(A-C)\cos A$$
$$=\tfrac{1}{2}[1-8\cos A\cos B\cos C]\Sigma \sin^2 A. \qquad \text{(EDWARDS.)}$$

Solution par M. LEMOINE. Au moyen des égalités

$$\sin(A-B)=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{2Rc}, \text{ etc.}$$

le premier membre prend successivement les formes

$$\frac{1}{4R^2}\sum\frac{(a^2-b^2)^2}{4c^2}-\frac{1}{4R^2}\sum\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2},$$

$$\frac{1}{8R^2a^2b^2c^2}\sum[2a^2b^2(a^2-b^2)^2-c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)],$$

$$\frac{1}{8R^2a^2b^2c^2}[a^6+b^6+c^6-2b^4c^4-2c^4a^4-2a^4b^4+a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)],$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2a^2b^2c^2}[a^2b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)],$$

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}\left[1-8\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right].$$

La dernière expression se ramène au deuxième membre de l'égalité proposée; donc le théorème est démontré.

Solution par M. Déprez. Soient α, β, γ les projections d'un segment PQ sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle. On a la relation générale

$$\tfrac{1}{2}\overline{PQ}^2\sum\sin^2 A=\sum\alpha^2+\sum\beta\gamma\cos A. \qquad (1)$$

En effet, si l'on mène AL égal et parallèle à PQ et que B′, C′ soient les projections de L sur AB, AC, AL est le diamètre du cercle AB′C′; donc

$$AL=\frac{B'C'}{\sin A}=\frac{\sqrt{\overline{AB'}^2+\overline{AC'}^2+2AB'.AC'\cos A}}{\sin A},$$

ou

$$\overline{PQ}^2\sin^2 A=\gamma^2+\beta^2+2\gamma\beta\cos A,$$

les projections α, β, γ étant soumises à la règle des signes. En faisant la somme des trois égalités analogues, on obtient la formule (1).

Appliquons celle-ci à la distance HO de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit; nous aurons

$$\alpha=R\sin(B-C),\quad \beta=R\sin(C-A),\quad \gamma=R\sin(A-B),$$

car α, par exemple, est égal à la projection du rayon AO sur BC et l'angle de AO avec AH est égal à B — C. D'après un théorème connu : $\overline{HO}^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$, etc.

Question 721.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 128.)

Eliminer x et y entre les équations

$$a\cos x + b\cos y = 1, \quad a\sin x + b\sin y = 1, \tag{1}$$

$$\sin 2x - \sin 2y = c^2(a^2 - b^2) \tag{2}$$

(Tucker.)

Solution par MM. Delahaye, Brocard, Déprez, Emmerich, Decamps.

Les deux premières équations peuvent se mettre sous les formes

$$\begin{cases} a\sin x = 1 - b\sin y, \\ a\cos x = 1 - b\cos y; \end{cases} \quad \begin{cases} b\sin y = 1 - a\sin x, \\ b\cos y = 1 - a\cos x. \end{cases}$$

Elevant au carré et additionnant on obtient

$$\sin y + \cos y = \frac{2 + b^2 - a^2}{2b}, \quad \sin x + \cos x = \frac{2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Elevant ces nouvelles équations au carré on trouve

$$1 + \sin 2y = \frac{(2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2}, \quad 1 + \sin 2x = \frac{(2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2},$$

et en soustrayant et tenant compte de la troisième équation proposée :

$$4a^2b^2c^2(a^2 - b^2) = b^2(2 + a^2 - b^2)^2 - a^2(2 + b^2 - a^2)^2.$$

On peut diviser par $a^2 - b^2$, ce qui donne

$$4a^2b^2c^2 = 4(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - 4 = [2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - 2].$$

Solution par M. Denys et de Strekalof. Faisant la somme des carrés des premières équations on trouve

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos(x - y) = 2. \tag{3}$$

Faisant la somme des mêmes équations multipliées d'abord par $\cos y$ et $\sin y$, et ensuite par $\cos x$ et $\sin x$, on obtient

$$a\cos(x - y) + b = \cos y + \sin y, \quad b\cos(x - y) + a = \cos x + \sin x.$$

Retranchons l'une de l'autre les deux dernières équations après les avoir élevées au carré; il vient

$$(a^2 - b^2)\sin^2(x - y) = \sin 2x - \sin 2y. \tag{4}$$

De celle-ci combinée avec l'équation (2), on déduit

$$\sin(x - y) = \pm c. \tag{5}$$

Enfin, de (3) et (5) on conclut

$$c^2 + \frac{(2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2} = 1.$$

Solution par M^lle C. DE HAAS (de Rotterdam). En mettant les équations (1) sous la forme

$$\begin{cases} b\cos y = 1 - a\cos x \\ 1 - a\sin x = b\sin y \end{cases}, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a\cos x = 1 - b\cos y \\ 1 - b\sin y = a\sin x \end{cases}$$

et en faisant le produit, on trouve

$$\cos y - a\cos y\sin x = \sin y - a\cos x\sin y,$$
$$\cos x - b\cos x\sin y = \sin x - b\cos y\sin x.$$

Ces égalités peuvent être écrites ainsi :

$$\cos y - \sin y = a\sin(x-y), \quad \cos x - \sin x = b\sin(y-x);$$

on en tire en faisant la différence des carrés :

$$\sin 2x - \sin 2y = (a^2 - b^2)\sin^2(x-y),$$

et en combinant ce résultat avec l'équation (2) :

$$\sin^2(x-y) = c^2. \tag{6}$$

Additionnons aussi les équations (1) après les avoir élevées au carré; il vient

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos(x-y) = 2. \tag{7}$$

De (6) et (7) on conclut la relation demandée

$$4a^2b^2c^2 = [2 - (a-b)^2]\,[(a+b)^2 - 2].$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

498. Résoudre un triangle ABC, connaissant le côté BC, l'angle A et le produit k^2 des bissectrices BB′, CC′ des angles ABC, ACB.

On a

$$BB' = \frac{a\sin C}{\sin(\frac{1}{2}B + C)}, \quad CC' = \frac{a\sin B}{\sin(B + \frac{1}{2}C)};$$

d'où

$$k^2 = \frac{a^2\sin B\sin C}{\sin(\frac{1}{2}B + C)\sin(B + \frac{1}{2}C)} = a^2\,\frac{\cos(B-C) + \cos A}{\cos\frac{1}{2}(B-C) + \sin\frac{3A}{2}}$$
$$= 2a^2\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}(B-C) - \sin^2\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C) + \sin\frac{3A}{2}}.$$

499. Démontrer que l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = 3(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

admet une seule solution réelle $x = \pm y = \pm z$.

L'équation se ramène à

$$(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2 = 0.$$

500. Soient A_1, B_1, C_1 trois points pris respectivement sur chacun des côtés du triangle ABC et tels que les perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés concourent en un même point. Posons

$$BA_1 = k.BC, \quad CB_1 = k.CA, \quad AC_1 = l.AB;$$

nous aurons

$$(2k-1)a^2+(2k-1)b^2+(2l-1)c^2 = 0. \qquad \text{(Besso.)}$$

501. Si le sommet A d'un triangle ABC décrit une circonférence Δ et que la base BC soit fixe, l'aire ABC varie proportionnellement à la puissance de A par rapport à un cercle fixe Δ'. Dans quel cas, ce cercle Δ' peut-il être remplacé par un point fixe? (Sollertinsky.)

Prenons BC pour axe des abscisses, et représentons le cercle Δ par

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2 = 0.$$

Cette équation peut prendre la forme

$$(x-a)^2+(y-b')^2-R'^2 = 2b''y, \quad \text{où} \quad b'+b'' = b, \quad b'^2-R'^2 = b^2-R^2;$$

il y a donc une infinité de cercles Δ', etc.

502. Une sécante tourne autour d'un point fixe A; elle rencontre les axes OX, OY aux points B, C. On joint B à un point fixe D pris sur OY, et par C on tire une parallèle à OX; les deux droites ainsi obtenues se coupent en un point M. Trouver le lieu géométrique de M.

Équation du lieu

$$ay^2+dxy-bdx-ady = 0.$$

Trouver les asymptotes.

503. Trouver le maximum de l'aire du triangle formé par les axes d'une ellipse avec une normale.

QUESTIONS PROPOSÉES.

733. Soit P une parabole donnée de foyer F. D'un point M, arbitrairement choisi dans son plan, on mène à cette courbe les normales MA, MB, MC. Les tangentes aux points A, B, C forment un triangle

A'B'C'. Démontrer que la circonférence A'B'C' est vue du point M sous un angle constant α, tel que

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$ (DE LONGCHAMPS.)

734. On donne une conique K, une droite d et un point O sur cette droite. Soient A, B deux points variables pris sur d et tels, que le produit OA . OB ait une valeur constante. Trouver le lieu des sommets du quadrilatère que forment les tangentes menées par A et B à la conique K.

735. Une parabole variable U touche une parabole fixe V en un point M et l'axe de V au pied de l'ordonnée de M. Le lieu du foyer de U est une cissoïde; la tangente au sommet enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; le lieu du pied de la directrice est une quintique; le centre du cercle osculateur de U en M décrit une parabole semicubique. (DÉPREZ.)

736. Intégrer l'équation

$$y'=\frac{xy-y^2}{1-x^2}$$ (E. CATALAN.)

***737.** Soit B'C' la transversale du triangle ABC, antiparallèle du BC dans l'angle BAC et passant par le pied K_a de la symédiane AK. 1° La polaire de A par rapport au cercle décrit sur BC comme diamètre, passe par les orthocentres H, H' des triangles ABC, AB'C' et est perpendiculaire à la médiane AG de ABC. 2° La corde commune NN' des cercles décrits sur BC, B'C' comme diamètres passe par K_a et les droites AN, AN' sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAC. 3° On a

$$\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{2}{\overline{AB'}^2+\overline{AC'}^2}.$$ (SOLLERTINSKY.)

***738.** Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle et x, y, z trois nombres, tels que leur somme $x+y+z$ soit positive. Démontrer que le produit xyz est négatif, si

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=0.$$ (W. J. GREENSTREET, M. A.)

Rectifications. Page 167, ligne 3 en remontant, lire $-\gamma^2$ au lieu de $-R^2$; dernière ligne, $\pm\gamma^2\sin\varphi$ au lieu de $\pm R^2\sin\varphi$; page 168, ligne 6, *perpendiculaire* à CM, au lieu de *parallèle* à CM.

NÉCROLOGIE.

ÉDOUARD LUCAS.

Au moment de mettre sous presse le présent numéro, nous sommes surpris par une nouvelle douloureuse autant qu'inattendue. L'un des collaborateurs de *Mathesis* les plus zélés et les plus distingués, Édouard Lucas, vient de succomber à l'âge de 49 ans à une courte maladie.

Né à Amiens en 1842, Édouard Lucas avait été admis à la fois, en 1861, à l'École Polytechnique et à l'École Normale. Il opta pour cette dernière, fut quelque temps astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris et servit brillamment en 1870, pendant la guerre franco-allemande, comme officier auxiliaire d'artillerie. Depuis lors, sa vie entière a été consacrée à l'enseignement et à la science. Il était en dernier lieu professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée St-Louis, à Paris.

Ses publications scientifiques sont innombrables et se trouvent répandues dans les principaux recueils mathématiques de l'Europe et des États-Unis. Les lecteurs de *Mathesis* ont pu maintes fois admirer la portée et la profondeur de cet esprit éminent, chez lequel la faculté d'invention était alliée à une grande érudition.

Les travaux d'Édouard Lucas ont porté sur presque toutes les branches des Mathématiques; mais ils ont eu pour principal objet l'Arithmétique supérieure. La mort le frappe au moment où il laisse une œuvre inachevée : il venait de publier un premier volume de sa *Théorie des nombres*; espérons que les notes laissées par lui permettront de reconstituer la suite de ce bel ouvrage.

La mort d'Édouard Lucas, on peut le dire sans aucune exagération, est une grande perte pour la science mathématique. Mais à côté du savant, il y avait en lui l'ami dévoué, le père de famille admirable.

Puissent les regrets que nous exprimons ici en notre nom et au nom de tous nos lecteurs, adoucir la douleur de ses nombreux amis et la désolation de ses enfants.

P. Mansion et J. Neuberg.

THÉORÈME DE CHOQUET.

M. Matrot, ingénieur en chef des mines (*), a appelé l'attention, il y a une quinzaine d'années, sur une curieuse remarque de Choquet(**), et en a montré la portée pratique pour la résolution numérique des équations. Cette remarque est tombée dans l'oubli; on ne la trouve dans aucun des manuels d'algèbre publiés récemment (de Longchamps, Niewenglowski, Amigues, de Comberousse), non plus que dans le traité si répandu de M. Bertrand. C'est pourquoi nous croyons utile de la signaler aux lecteurs de *Mathesis*.

Soit

$$u = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.},$$

une fonction entière, prenant pour $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$, dont les différences successives sont $\Delta u_0, \Delta u_1, \ldots, \Delta u_{n-1}, \Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \ldots, \Delta^2 u_{n-2}, \ldots, \Delta^n u_0$. Dans le cas où les quantités $x_0, x_1, \ldots, x_n$ diffèrent l'une de l'autre d'une même quantité h, de sorte que

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \ldots, \quad x_n = x_0 + nh,$$

on a, comme on sait (***),

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \cdots$$
$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\cdots\left(\frac{x - x_0}{h} - n\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2\ldots n}.$$

(*) *Note sur la résolution numérique des équations algébriques de degré quelconque par la méthode des différences.* Lille, Danel, 1875 (18 p. in-8°. Extrait des Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille).

(**) *Traité d'Algèbre*, par Choquet. Paris, Mallet-Bachelier, 1856, pp. 377-378, et note des pages 385-386.

(***) C'est l'une des *deux* formules de Newton pour exprimer u au moyen des valeurs de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$. La seconde se rapporte au cas où les valeurs de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas équidistantes (Voir, par exemple, notre *Résumé d'Analyse*, n° 243, pp. 120-122 et p. 285). Presque tous les auteurs français disent, à tort, que Newton n'a pas traité ce second cas.

Si l'on fait, pour abréger, $x - x_0 = hz$, cette formule devient

$$u = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \cdots + \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0.$$

Supposons que la valeur de z soit comprise entre 0 et 1, ce qui a lieu quand on donne à x des valeurs comprises entre x_0 et $x_0 + h$. Dans ce cas, les coefficients de Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... sont alternativement positifs et négatifs. Nous pouvons donc écrire, en mettant les signes en évidence,

$$u = u_0 + z\Delta u_0 - \frac{z(1-z)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(1-z)(2-z)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 - \frac{z(1-z)(2-z)(3-z)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0 + \cdots \pm \frac{z(1-z)\ldots(n-1-z)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0.$$

Or $\frac{1}{2}z(1-z)$ est au plus égal à $\frac{1}{8}$ quand z varie de 0 à 1; le coefficient de $\Delta^3 u_0$, quand z varie de 0 à 1, a pour maximum $\sqrt{1:243}$, comme on peut le prouver d'une manière élémentaire; donc il est inférieur à $\frac{1}{15}$. On a ensuite

$$\frac{z(1-z)(2-z)(3-z)}{1.2.3.4} < \frac{z(1-z)(2-z)}{1.2.3}\cdot\frac{3}{4} < \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{4} \text{ ou } \frac{1}{20},$$

$$\frac{z(1-z)(2-z)(3-z)(4-z)}{1.2.3.4.5} < \frac{1}{20}\cdot\frac{4}{5} \text{ ou } \frac{1}{25},$$

. . . . . .

$$\frac{z(1-z)\ldots(n-1-z)}{1.2\ldots n} < \frac{1}{5n}.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$u = u_0 + \lambda_1\Delta u_0 - \frac{\lambda_2}{8}\Delta_2 u_0 + \frac{\lambda_3}{15}\Delta_3 u_0 - \frac{\lambda_4}{20}\Delta_4 u_0 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\lambda_n}{5n}\Delta_n u_0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant des fractions (*).

Il résulte de là que, chaque fois que u_0 surpasse, en valeur absolue, l'ensemble des termes de signe contraire à celui de u_0, termes où l'on

(*) Cette formule s'applique même aux fonctions transcendantes, si l'on remplace $\Delta^n u_0$ par $\pm h^n M_n$, M_n étant une quantité supérieure ou égale à la plus grande valeur de $D_x^n u$, dans l'intervalle $(x_0, x_0 + nh)$. Pour la démonstration de cette remarque due à Cauchy, voir, par exemple, notre *Resumé d'Analyse*, n° 244, pp. 124-125.

remplace les λ par 1, la fonction u ne change pas de signe quand x varie de x_0 à $x_0 + h$.

Pour montrer l'utilité de la remarque précédente, nous empruntons à la brochure de M. Matrot, une application relative à l'équation

$$8x^3 - 12x^2 + 3x - 1 = 0,$$

étudiée par Briot. « Si l'on substitue les nombres entiers consécutifs, on reconnaît facilement, comme le fait remarquer Briot, qu'il n'y a de doute que pour l'intervalle de 0 à 1. En substituant par dixièmes dans cet intervalle, on forme le tableau suivant :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0,0	— 1,000	+ 0,188	— 0,192	+ 0,048
0,1	— 0,812	— 0,004	— 0,144	+ 0,048
0,2	— 0,816	— 0,148	— 0,096	+ 0,048
0,3	— 0,964	— 0,244	— 0,048	+ 0,048
0,4	— 1,208	— 0,292	— 0,000	+ 0,048
0,5	— 1,500	— 0,292	+ 0,048	+ 0,048
0,6	— 1,792	— 0,244	+ 0,096	+ 0,048
0,7	— 2,036	— 0,148	+ 0,144	+ 0,048
0,8	— 2,184	— 0,004	+ 0,192	+ 0,048
0,9	— 2,188	+ 0.188	+ 0,240	+ 0,048
1,0	— 2,000			

Si l'on applique la formule de Choquet aux subdivisions précédentes, « on voit immédiatement que u ne peut s'annuler dans aucune d'elles, puisque u_0 est, pour toutes, supérieur en valeur absolue, à la somme des trois différences. L'équation proposée n'a, par conséquent, aucune racine dans l'intervalle de 0 à 1. » D'ailleurs, en faisant $h = \frac{1}{2}$, on trouve

$$u = -1 - \tfrac{1}{2}\lambda_1 + \tfrac{2}{5}\lambda_3, \quad \text{de } x = 0 \text{ à } x = \tfrac{1}{2},$$

et

$$u = -1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda_1 + \tfrac{3}{4}\lambda_2 + \tfrac{2}{5}\lambda_3, \quad \text{de } x = \tfrac{1}{2} \text{ à } x = 1,$$

ce qui conduit à la même conclusion plus rapidement encore.

Comme on le voit, grâce au théorème de Choquet et Matrot, la méthode de recherche des racines des équations, fondée sur le principe de substitution (*), est plus pratique qu'elle ne le parait au premier

(*) Appelée en France, *Méthode des Différences*, depuis 1852. Le principe de substitution est la base de la méthode de résolution des équations transcendantes.

abord. Quand on l'applique, on ne doit pas oublier qu'il est inutile de supposer h plus petit que la limite inférieure assignée par Cauchy à la différence de deux racines réelles de l'équation(*). (P. M.)

×THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE(**);

par M. SOLLERTINSKY (Gatchina, Russie).

1. Étant donné un triangle ABC, on peut construire quatre cercles ω_a, ω_{aa}, ω_{ab}, ω_{ac} tangents aux côtés AB, AC ou à leurs prolongements et au cercle circonscrit.

Les rayons de ces cercles sont respectivement

$$r\,\text{séc}^2\frac{A}{2},\quad r_a\,\text{séc}^2\frac{A}{2},\quad r_b\,\text{coséc}^2\frac{B}{2},\quad r_c\,\text{coséc}^2\frac{C}{2}.$$

Les polaires de A par rapport à ces cercles passent respectivement par les centres I, I_a, I_b, I_c, des cercles touchant les trois côtés de ABC.

Soient V_a, V_{aa}, V_{ab}, V_{ac} les points où les cercles ω_a, ω_{aa} ··· touchent le cercle ABC, et soient D, D′ les points où les bissectrices AI, AI_b coupent le cercle ABC. Les droites D′I, D′I_a, DI_b, DI_c passent respectivement par V_a, V_{aa}, V_{ab}, V_{ac}. Les droites AV_a, BV_b, CV_c concourent au point inverse du point de Nagel du triangle ABC; les droites AV_{aa}, BV_{bb}, CV_{cc}, au point inverse du point de Gergonne; les droites AV_a, BV_{bc}, CV_{cb}, au point inverse d'un adjoint du point de Nagel; les droites AV_{aa}, BV_{ba}, CV_{ca}, au point inverse d'un adjoint du point de Gergonne.

Les droites V_aV_{aa}, $V_{ab}V_{ac}$ se coupent sur BC, au centre d'un cercle d'Apollonius du triangle ABC.

2. Soient α, β, γ; α', β', γ' les pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles du triangle ABC.

(*) M. Matrot a déduit de cette remarque le théorème suivant : Si l'on suppose exprimées en nombre décimaux toutes les racines réelles d'une équation algébrique de degré m, privée de racines égales et ayant l'unité pour coefficient de son premier terme et tous ses autres coefficients entiers, le nombre de chiffres communs, à partir de la gauche, à p racines est toujours inférieur à $[Nm(m-1):p(p-1)]$, N étant le nombre de chiffres, soit du double du plus grand coefficient de l'équation, soit du double d'une limite supérieure quelconque des modules des racines.

(**) Pour ces Théorèmes, on peut comparer *Mathesis*, t. X, p. 67 (DE LONGCHAMPS) et t. VII, p. 84. (VIGARIÉ.)

Les pôles des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ par rapport au cercle ABC sont les inverses des adjoints des points de Gergonne. Le triangle $\alpha\beta\gamma$ est homologique avec le triangle formé par les tangentes en A, B, C au cercle ABC; le centre d'homologie est l'inverse du point de Gergonne du triangle ABC; l'axe d'homologie est la polaire, par rapport au cercle ABC, de l'inverse triangulaire du point de Nagel du triangle ABC.

Les triangles $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma$ jouissent de propriétés analogues.

3. Les inverses des points de Gergonne du triangle ABC, pris trois à trois, sont les sommets de quatre triangles homologiques avec le triangle des tangentes en A, B, C au cercle ABC. Le centre d'homologie est le quatrième de ces points inverses; l'axe d'homologie est la polaire du centre du cercle tritangent correspondant.

4. Les milieux des bissectrices d'un triangle sont trois à trois sur quatre droites harmoniquement associées aux points du groupe de Gergonne; ces droites sont aussi les polaires des points de Gergonne correspondants par rapport aux cercles tritangents correspondants.

5. Soient m_1, m_2, m_3 les symétriques d'une même droite m par rapport aux trois côtés d'un triangle ABC. On sait (*Mathesis*, t. VI, p. 142) que le triangle $m_1m_2m_3$ est inversement semblable au triangle orthique de ABC; qu'il est perspectif avec le triangle ABC par rapport à un point η de la circonférence ABC, homologue de l'orthocentre de ABC considéré dans le triangle orthique.

Si m est antiparallèle à un côté de ABC, les droites m, m_1, m_2, m_3 forment un quadrilatère inscriptible.

Si m est la droite de Simson d'un point η de la circonférence ABC, le quadrilatère $mm_1m_2m_3$ est circonscriptible à une circonférence de centre η(*).

BIBLIOGRAPHIE.

Géométrie élémentaire. Théorèmes et problèmes comprenant les principales questions portées aux examens de l'école militaire et de l'école normale, par L. THÉLIE, professeur de mathématiques à l'école normale de Verviers, ancien inspecteur des études à l'école militaire. Quatre volumes in-12, cartonnés, de XIX-273, 244, 96, 111 pages,

---

(*) Faisons tourner la droite m autour d'un point fixe; les sommets du triangle $m_1m_2m_3$ décrivent trois circonférences. (J. N.)

avec 280, 275, 96, 104 figures. — Namur, Ad. Wesmael-Charlier, 1882-1891. Prix : 3-50 + 4 + 2 + 2 francs.

Chacun des quatre volumes de M. Thélie comprend des applications relatives à deux des livres de la géométrie élémentaire, et ce travail est destiné spécialement aux étudiants qui se préparent aux écoles spéciales.

Tout en trouvant fort heureuse l'idée de réunir les propositions si nombreuses et si importantes qui ne figurent pas parmi les théorèmes classiques de Legendre, nous n'approuvons guère le plan général de l'ouvrage qui n'est en somme qu'un catalogue plus ou moins bien classé de questions pouvant être posées dans les examens. Se proposer un but pareil, c'est envisager la géométrie à un point de vue étroit et s'exposer à commettre des fautes graves. Le plus grand défaut de l'ouvrage est, suivant nous, l'absence de cohésion entre les propositions successives. L'emploi de rubriques générales portant sur plusieurs théorèmes ne remédie pas à cet inconvénient.

Non seulement les diverses applications ne sont rattachées par aucun lien, mais le plus souvent, elles ne sont même pas rangées dans l'ordre logique : ainsi, dans le livre I, les propriétés des milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère se trouvent dispersées aux nos 35, 40, 69. Bien plus, certaines vérités se trouvent répétées à plusieurs endroits et démontrées par des méthodes un peu différentes dans la forme, mais identiques au fond. Par exemple, dans le livre I, les nos 90, 91 traitent du même objet, comme aussi les nos 92, 110, 112 de ce livre et les nos 9, 11, 13 du livre VIII. Par suite, le nombre des questions résolues se trouve singulièrement réduit. Hâtons-nous d'ajouter que, malgré ces réductions, il reste énormément de choses dans le livre de M. Thélie, et c'est là sa principale, peut être sa seule qualité.

Quant à la rédaction, l'auteur a cherché à la rendre concise autant que possible, mais il n'y a réussi parfois qu'aux dépens de la clarté et de la correction. Citons, par exemple, cet énoncé (Livre I, n° 57) : « En divisant arbitrairement, mais dans le « même sens, les côtés d'un carré et joignant les points de division, on forme un « carré inscrit »

Malgré la concision habituelle de l'auteur, ses raisonnements présentent parfois des longueurs inexplicables. En lisant, par exemple, le commencement du livre VIII, on remarque immédiatement que les démonstrations des nos 5, 14, 16, 18, 19, 20 peuvent être notablement simplifiées, la plupart en appliquant le théorème de Guldin qui se trouve exposé tout au début du livre. Il est vrai que l'auteur en donne une démonstration qui manque absolument de rigueur; peut-être a-t-il reconnu lui-même l'insuffisance de son raisonnement et a-t-il éprouvé quelque scrupule à se servir d'une vérité si peu établie.

Pour donner un exemple des simplifications qu'on pourrait apporter à certains théorèmes, citons encore le n° 75 du livre VIII; il s'agit de chercher le minimum de la fonction $x^2 + xy + y^2$, xy étant constant; l'auteur a recours à une équation bicarrée, alors qu'il est si simple d'observer que $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$.

En revanche, bien des démonstrations sont incomplètes; dans beaucoup de théorèmes et de problèmes, la discussion est insuffisante ou nulle; certains cas possi-

bles sont oubliés, la réciproque n'est pas établie, des généralisations ou des remarques importantes font défaut, etc.

Les exemples que nous avons donnés ci-dessus sont pris au hasard parmi beaucoup d'autres; la place nous manque pour énumérer toutes les fautes; nous ne pouvons cependant nous dispenser de signaler encore une grossière erreur de calcul (Livre VIII, n° 21) et un raisonnement faux (Livre I, n° 21).

Concluons en disant qu'il y a dans cet ouvrage la matière d'un bon livre; mais pour en tirer ce bon livre, il faudrait le refaire sur un plan nouveau et surtout le revoir avec soin d'un bout à l'autre au double point de vue de la forme et du fond(*). M. STUYVAERT.

Traité d'Analyse, par É. PICARD, Membre de l'institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome I : Intégrales simples et multiples. — Applications géométriques du calcul infinitésimal, 1891. Paris, Gauthier-Villars et Fils (XII-457 p., in-8)(**). Prix : 15 fr.

Dans ce *Traité d'Analyse*, le savant professeur de la Faculté des sciences de Paris a pour but principal de développer la théorie des équations différentielles. Comme cette partie du calcul intégral est intimement liée à plus d'une autre théorie, l'auteur a cru utile de donner, dans un premier volume, tous les préliminaires indispensables à ceux qui ne connaissent que les élements du calcul différentiel, pour aborder la théorie des équations différentielles.

Dans ce volume, il expose d'abord les éléments du calcul intégral, en insistant sur les notions d'intégrale curviligne et d'intégrale de surface, qui jouent un rôle si important en physique mathématique. La seconde partie traite de quelques applications de ces notions générales; au lieu de prendre des exemples sans intérêt, il développe la théorie de l'équation de Laplace et les propriétés fondamentales du potentiel. On y trouvera ensuite l'étude de quelques développements en séries, particulièrement des séries trigonométriques. La troisième partie est consacrée aux applications géométriques du calcul infinitésimal. Voici au reste le sommaire détaillé des matières du tome premier :

Ire PARTIE. — **Intégrales simples et multiples.** — CHAP. I. *Des intégrales définies.* Définition de l'intégrale définie, ses propriétés fondamentales. Fonction ayant pour dérivée une fonction donnée. Applications géométriques. Intégration par parties. Formule de Taylor. Changement de variable. Extension de la notion d'intégrale définie. Cas où la fonction et où les limites deviennent infinies. Différentiation sous le signe d'intégration. Intégrale d'une fonction complexe d'une variable

---

(*) Nous devons spécialement mettre nos jeunes lecteurs en garde contre l'*Histoire de la Géométrie*, inexacte et incomplète, mise en tête du premier volume. (P. M.)

(**) Les autres volumes contiendront Tome II : Fonctions analytiques. — Principes généraux de la théorie des équations différentielles; Tome III: Équations différentielles ordinaires; Tome IV : Équations aux dérivées partielles.

réelle. — CHAP. II. *Intégrales indéfinies.* Intégrales des fractions rationnelles. Intégrales hyperelliptiques. Intégrales de différentielles algébriques. Intégrales des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$. — CHAP. III. *Intégrales curvilignes.* Définition des intégrales curvilignes. Condition pour que l'intégrale curviligne $\int (P dx + Q dy)$ ne dépende que des limites. De l'intégrale curviligne considérée comme fonction de sa limite supérieure. Exemples d'intégrales effectuées le long d'un contour fermé. Racines communes à deux équations. — CHAP. IV. *Des intégrales doubles.* Définition des intégrales doubles. Changement de variables dans les intégrales doubles. Applications. Volumes et surfaces. Définition des intégrales de surfaces. Condition pour que l'intégrale de surface $\int (A dy dz + B dz dx + C dx dy)$ ne dépende que du contour Formule de Stokes. Racines communes à deux équations. — CHAP. V. *Des intégrales multiples.* Définition et propriétés fondamentales des intégrales multiples. Cas où la fonction devient infinie ou indéterminée. Quelques formules relatives aux intégrales triples. II^e^ PARTIE. — **L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries.** — CHAP. VI. *De l'équation de Laplace.* Formule fondamentale. Énoncé du principe de Dirichlet. Problème de Dirichlet dans le cas d'une sphère. Sur une généralisation de l'intégrale de Gauss. Principe de Dirichlet pour une surface convexe. — CHAP. VII. *Attraction et potentiel.* Définitions et premières propriétés du potentiel. Formule de Poisson. Propriétés caractéristiques du potentiel. Attraction d'un ellipsoïde. Attraction d'une couche superficielle. Théorème de M. Bertrand. Méthode de M. Robin pour la recherche d'une couche sans action sur un point intérieur. — CHAP. VIII. *Intégrations des séries. Séries entières.* Des séries uniformément convergentes. Des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable. — CHAP. IX. *Des séries trigonométriques.* Généralités. Intégrale de Dirichlet. Série de Fourier. Ordre des coefficients. Sa convergence conforme. Sur les séries trigonométriques les plus générales. Théorème de M. Cantor. L'intégrale de Poisson. Réprésentation approchée des fonctions. — CHAP. X. *Séries multiples.* Généralités sur les séries multiples. Théorème de Cauchy. Quelques applications. Exemples de séries multiples où les entiers ne sont pas arbitraires. — III^e^ PARTIE. — **Applications géométriques du calcul infinitésimal.** — CHAP. XI. *Théorie des enveloppes. Surfaces réglées. Congruences et complexes.* Théorie des enveloppes. Surfaces développables. Surfaces réglées. Congruences de droites. Généralités sur les complexes. Complexes linéaires. — CHAP. XII. *Théorie du contact. Courbure.* Contact des courbes planes. Courbure des courbes planes. Développées et développantes. Contact des courbes gauches. Contact des courbes et des surfaces. Remarques sur les courbes gauches algébriques; formules de Cayley. Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. — CHAP. XIII. *Courbure et torsion des courbes gauches. Formules fondamentales.* Courbure et torsion des courbes gauches. Centre de courbure. Formules de Frenet. Quelques applications. Développées des courbes gauches. Hélices. Courbes sphériques. — CHAP. XIV. *Des courbes tracées sur une surface.* De la courbure des courbes tracées sur une surface. Théorèmes d'Euler et de Meunier. Lignes de courbure. Propriétés et équations générales. Théorème de Joachimsthal. Théorème de Dupin. Surface enveloppe de sphères. Cyclide de Dupin. Généralités sur les lignes

asymptotiques. Quelques exemples. Lignes asymptotiques de certaines surfaces réglées. — CHAP. XV. *Surfaces applicables. Représentation conforme. Cartes géographiques.* Expression du carré de l'élément d'arc sur une surface. Représentation conforme d'un plan sur un plan. Quelques exemples de représentation conforme. Sur les substitutions linéaires. Carte d'une surface.

SUR LES MOMENTS D'INERTIE(*);

par M. J. NEUBERG.

1. On sait que le *moment d'inertie* I, par rapport à un plan (P), d'un système de points matériels A_1, A_2, ..., dont les masses sont M_1, M_2, ... est la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à ce plan. Si l'on pose $I = \rho^2 \Sigma M$(**), ρ est le *rayon d'inertie* du système (A) par rapport à (P). Avec M. Darboux, nous dirons aussi que I est le paramètre de (P) par rapport au système (A).

Soient (X_1, Y_1, Z_1), ... les coordonnées rectangulaires de A_1, ..., et soit

$$ux + vy + wz + p = 0$$

l'équation de (P). Alors

$$I(u^2 + v^2 + w^2) = \Sigma M(uX + vY + wZ + p)^2. \qquad (1)$$

L'enveloppe des plans de paramètre nul est la quadrique représentée en coordonnées tangentielles (u, v, w, p) par l'équation

$$\Sigma M(uX + vY + wZ + p)^2 = 0. \qquad (2)$$

Cette surface auxiliaire, considérée par M. Reye et par O. Hesse, peut

---

(*) Cet article tient lieu de solution de la question proposée 310 (*Mathesis*, t. IV, p. 48), laquelle demande une rectification. Nous en avons emprunté les développements, en grande partie, aux auteurs suivants :

REYE. *Beiträge zu der Lehre von den Trägheitsmomenten* (J. de Schlömilch, t. IX, pp. 433-455); *Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen* (J. de Crelle, t. LXXII, pp. 293-326).

O. HESSE. *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*. Leçon XXV.

DARBOUX. *Sur les rapports de la Théorie des moments d'inertie avec celle des surfaces homofocales* (Note XXII de la *Mécanique* de Despeyrous).

(**) Pour simplifier l'écriture, nous écrivons ΣM, ΣMX, ... au lieu de

$$M_1 + M_2 + \cdots \quad M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots \quad \cdots$$

Lorsqu'il s'agit d'un système *continu* de points matériels, ces sommes sont remplacées par des intégrales définies.

être appelée *image d'inertie* du système (A) (*Imaginaires Bild*, d'après Hesse). Si toutes les masses sont positives et non situées dans un même plan, l'image d'inertie est un ellipsoïde imaginaire ; c'est l'hypothèse que nous adoptons d'abord. Il résulte des notions vues en géométrie analytique, qu'il existe un système d'axes rectangulaires, et généralement un seul, par rapport auquel l'équation (2) prend la forme réduite

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Dp^2 = 0. \qquad (3)$$

En adoptant, dès le commencement, ces axes des coordonnées (appelés *axes principaux* d'inertie), nous pouvons identifier les équations (2) et (3), ce qui donne les égalités

$$\begin{array}{llll} \Sigma MX^2 = A, & \Sigma MZ^2 = B, & \Sigma MZ^2 = C, & \\ \Sigma MYZ = 0, & \Sigma MZX = 0, & \Sigma MXY = 0, & \\ \Sigma MX = 0, & \Sigma MY = 0, & \Sigma MZ = 0, & \Sigma M = D. \end{array}$$

On en conclut que le centre de symétrie de l'image d'inertie coïncide avec le centre de gravité G du système matériel ; que D est la masse totale du système et que A, B, C sont les paramètres des plans principaux d'inertie.

Soient a, b, c les rayons d'inertie du système par rapport aux plans principaux d'inertie, de sorte que

$$A = Da^2, \quad B = Db^2, \quad C = Dc^2;$$

l'équation de l'image d'inertie sera, en coordonnées tangentielles,

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2 = 0,$$

et en coordonnées ponctuelles,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

La formule (1) est maintenant remplacée par celle-ci :

$$I(u^2 + v^2 + w^2) = D(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2),$$

ou, à cause de $I = D\rho^2$, par l'égalité

$$(c^2 - \rho^2)u^2 + (b^2 - \rho^2)v^2 + (c^2 - \rho^2)w^2 + p^2 = 0,$$

laquelle exprime que le plan (P) touche la surface représentée en coordonnées ponctuelles par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} + \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} + 1 = 0.$$

Par conséquent : 1° *le carré du rayon d'inertie d'un système matériel par rapport à un plan donné est égal au carré du paramètre de la surface homofocale avec l'image d'inertie et tangente à ce plan ; 2° l'enveloppe des plans de même paramètre est une surface homofocale avec l'image d'inertie.*

2. L'image d'inertie étant rapportée à un tétraèdre conjugué $B_1B_2B_3B_4$ a une équation, en coordonnées tangentielles, de la forme

$$m_1\alpha^2 + m_2\beta^2 + m_3\gamma^2 + m_4\delta^2 = 0,$$

de sorte qu'on peut poser

$$D(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2) \equiv \Sigma m(ux + vy + wz + p)^2, \qquad (4)$$

(x_n, y_n, z_n) désignant les coordonnées de B_n par rapport aux axes principaux d'inertie GX, GY, GZ.

De là le théorème suivant, dû à M. Reye :

Étant donné un système matériel quelconque, il existe une infinité de systèmes de quatre points B_1, B_2, B_3, B_4 *tels, que si on leur attribue des masses convenables* m_1, m_2, m_3, m_4, *leur moment d'inertie par rapport à un plan quelconque est égal à celui du système donné par rapport au même plan. Tous les tétraèdres* $B_1B_2B_3B_4$ *sont conjugués avec l'image d'inertie*(*).

Les deux systèmes matériels (A) et (B) sont *équivalents* relativement à leurs moments d'inertie par rapport à un plan quelconque. Ils ont même image d'inertie, même masse totale, même centre de gravité G. On tire de là les conséquences suivantes :

1° Le choix du point B_1 détermine sa masse m_1, le plan $B_2B_3B_4$ et le centre de gravité des masses m_2, m_3, m_4.

Car le plan $B_2B_3B_4$ est le plan polaire de B_1 ; si h est sa distance à B_1 et I_1 son paramètre, m_1 résulte de l'égalité évidente $I_1 = m_1h_1^2$; le point de rencontre de la droite CB_1 avec le plan $B_2B_3B_4$ est le centre de gravité des masses m_2, m_3, m_4.

(*) Bien que l'image d'inertie soit imaginaire, la construction des tétraèdres conjugués ne présente pas de difficulté. Le plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) a pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} + 1 = 0;$$

il coïncide avec le plan polaire du point $(-x_1, -y_1, -z_1)$, pris relativement à l'ellipsoïde réel qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si l'on exprime que le rapport des distances des points B_i et G au plan polaire de B_i est égal à $\frac{D}{m_i}$, on trouve

$$\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2}+\frac{z_i^2}{c^2}+1=\frac{D}{m_i}.$$

2° Le choix de la droite sur laquelle se trouvent les points B_1 B_2 détermine la droite B_3B_4 et les centres de gravité g, g' des couples m_1 et m_2, m_3 et m_4.

En effet, B_3B_4 est la droite polaire de B_1B_2 et G partage la droite gg' dans le rapport $m_3+m_4 : m_1+m_2$; donc g et g' se trouvent sur la droite qui passe par G et s'appuie sur B_1B_2, B_3B_4, et l'on connaît même les sommes m_1+m_2, m_3+m_4.

3. Prenons la masse totale du système (A) pour unité de masse et introduisons les coordonnées cartésiennes homogènes x, y, z, t ($t=1$). L'identité (4) devient

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2+p^2\equiv \mathbf{S}m\,(ux+vy+wz+pt)^2$$

et conduit aux égalités :

$$\mathbf{S}mx^2=a^2,\quad \mathbf{S}my^2=b^2,\quad \mathbf{S}mz^2=c^2,\quad \mathbf{S}mt^2=1,$$
$$\mathbf{S}myz=0,\quad \mathbf{S}mzx=0,\quad \mathbf{S}mxy=0,\quad \mathbf{S}mxt=0,\quad \text{etc.}$$

Posons

$$\frac{x\sqrt{m}}{a}=\alpha,\quad \frac{y\sqrt{m}}{b}=\beta,\quad \frac{z\sqrt{m}}{c}=\gamma,\quad t\sqrt{m}=\delta;$$

il vient :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1,\\
&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2=1,\\
&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2=1,\\
&\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2=1,\\
&\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3+\beta_4\gamma_4=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Or, ce sont là les conditions exprimant que la substitution

$$\mu_r=\alpha_r\nu_1+\beta_r\nu_2+\gamma_r\nu_3+\delta_r\nu_4,\quad (r=1,\,2,\,3,\,4)$$

est orthogonale. On sait qu'elles entraînent les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\delta_1^2=1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2+\delta_1\delta_2=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Donc en revenant aux notations primitives, on peut écrire

$$\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2}+\frac{z_i^2}{c^2}+1=\frac{1}{m_i},$$

. . . . . .

$$\frac{x_i x_2}{a^2}+\frac{y_i y_2}{b^2}+\frac{z_i z_2}{c^2}+1=0.$$

. . . . . .

Ces relations se prêtent à une nouvelle démonstration du théorème de M. Reye.

4. On peut se donner arbitrairement, sous la condition

$$m_1+m_2+m_3+m_4=1,$$

les masses à attribuer aux points du système matériel $B_1B_2B_3B_4$, équivalent à un système proposé (A). Les points B se trouvent, respectivement, sur quatre ellipsoïdes déterminés E_1, E_2, E_3, E_4, représentés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=\frac{1}{m_n}, \quad (n=1, 2, 3, 4).$$

Prenons arbitrairement B_1 sur E_1, B_2 sur l'intersection de E_2 avec le plan polaire de B_1 par rapport à l'image d'inertie E; B_3 sera l'un des points d'intersection de E_3 avec la polaire de la droite B_1B_2, prise relativement à E; enfin B_4 est le pôle du plan $B_1B_2B_3$.

En particulier, soit $m_1=m_2=m_3=m_4=\frac{1}{4}$; le tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ est inscrit à l'ellipsoïde représenté par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3,$$

et peut avoir une infinité de positions(*).

5. Le moment d'inertie d'un système matériel (A) par rapport à un point N ou par rapport à une droite *d* est la somme des produits des masses du système par le carré de leur distance à ce point ou à cette droite. Inversement, cette somme est appelée le *paramètre* du point ou de la droite par rapport au système (A). Le paramètre d'une droite ou d'un point peut s'obtenir en faisant la somme des paramètres de deux

---

(*) La question 310 est ainsi rectifiée, et résolue complètement.

plans rectangulaires menés par la droite ou de trois plans rectangulaires passant par le point. Il résulte de là que deux systèmes matériels (A) et (B), qui ont même moment d'inertie par rapport à un plan quelconque, ont aussi même moment d'inertie par rapport à un point quelconque ou à un axe quelconque. On a déjà vu que de tels systèmes ont même centre de gravité G, même masse totale que nous supposons égale à l'unité, et même image d'inertie E.

Conservons les notations employées précédemment. Le paramètre de G étant égal à la somme de ceux des plans principaux de E, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \Sigma m \cdot \overline{BG}^2.$$

Celui du point $N(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour expression

$$\Sigma m \left\{ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \right\} (*) = \Sigma m \cdot \overline{GR}^2 + \overline{NG}^2.$$

Donc

$$\Sigma m \cdot \overline{NB}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \overline{NG}^2.$$

Si tous les points B sont sur une même sphère, décrite du centre N avec le rayon R, l'égalité précédente prend la forme

$$-(a^2 + b^2 + c^2) = \overline{NG}^2 - R^2.$$

De là le théorème suivant : *Lorsque des points matériels se trouvent sur une même sphère, la somme des carrés des demi-axes de l'image d'inertie égale la puissance du centre de gravité par rapport à cette sphère.*

En particulier, *tous les systèmes équivalents, composés de quatre points matériels, jouissent de la propriété que les sphères passant par les points d'un système ont pour centre radical commun le centre de gravité.*

Si l'on introduit des masses négatives, l'image d'inertie peut être l'une quelconque des quadriques à centre, pourvu que la somme des masses soit différente de zéro; par conséquent, *la puissance du centre d'une quadrique par rapport à la sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué quelconque est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes* (**).

(*) On développe cette expression, en ayant égard aux égalités

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0, \quad \Sigma m = 1.$$

(**) Théorème de Faure et Painvin. Voir N. A. M., 1880 (2), t. XIX, p. 290.

Appliquons la règle de la multiplication des déterminants aux deux systèmes d'éléments

$$\left\| \begin{matrix} m_1x_1 & m_2x_2 & \cdots & m_nx_n \\ m_1y_1 & m_2y_2 & \cdots & m_ny_n \\ m_1z_1 & m_2z_2 & \cdots & m_nz_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{5}$$

En tenant compte des relations (3°), on trouve le déterminant

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2.$$

Mais le résultat est aussi la somme des produits d'un déterminant formé avec quatre colonnes quelconques du premier système par le déterminant homologue déduit du second système. Donc

$$a^2b^2c^2 = 36 \, \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3m_4 \, (\text{vol. } B_1B_2B_3B_4)^2.$$

Soit $n = 4$, et désignons par V_1, V_2, V_3, V_4, V les volumes $GB_2B_3B_4$, $GB_3B_4B_1$, $GB_4B_1B_2$, $GB_1B_2B_3$, $B_1B_2B_3B_4$; par F_1, F_2, F_3, F_4 les aires $B_2B_3B_4$, · ·; par $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ les distances de G aux faces du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$. Comme $m_1 = \frac{V_1}{V}$, ···, nous aurons

$$a^2b^2c^2 = 36 \frac{V_1V_2V_3V_4}{V^2} \text{ (*)}.$$

En supprimant les premières lignes des systèmes (5) et en effectuant le produit des nouveaux systèmes, on trouve

$$a^2b^2 = \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

La somme de cette égalité et des deux égalités analogues donne

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4 \, \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3 \cdot (\text{aire } B_1B_2B_3)^2.$$

Dans l'hypothèse de $n = 4$, cette relation devient

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{4}{27} F_1F_2F_3F_4 \, \mathfrak{S} \, \delta_1\delta_2\delta_3F_4 = Kv,$$

(*) Théorème énoncé par Painvin, loc. cit.

K étant un facteur qui ne dépend que du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$, et v désignant le volume du tétraèdre qui a pour sommets les projections de G sur les faces. De là on déduit le théorème suivant : *Lorsque la somme* (algébrique) *des inverses des carrés des axes est nulle, les projections du centre d'une quadrique sur les faces d'un tétraèdre conjugué sont situées dans un même plan*(*).

Les formules suivantes se démontrent de la même manière :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \mathbf{S} m_1 m_2 \cdot \overline{B_1B_2}^2,$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4\mathbf{S} m_1 m_2 \cdot (\text{aire } GB_1B_2)^2,$$
$$a^2b^2c^2 = 36\mathbf{S} m_1 m_2 m_3 \, (\text{vol. } GB_1B_2B_3)^2.$$

Nous arrêtons ici ces développements, en renvoyant le lecteur qui voudrait approfondir ces questions, aux auteurs déjà cités, et à P. SERRET, *Géométrie de Direction*.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (**).

Question 707.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 80.)

Deux cercles de rayons R, *r ont leurs centres* O, *o sur une droite donnée; ils sont tels qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans le cercle* O *et ayant leurs côtés tangents au cercle o. Cela posé* : 1° *Trouver l'enveloppe du cercle de rayon* R *si le cercle de rayon r est fixe.* 2° *Trouver l'enveloppe du cercle de rayon r si le cercle de rayon* R *est fixe.* 3° *Trouver le lieu du point de Lemoine des triangles inscrits au cercle de rayon* R *et dont les côtés touchent le cercle de rayon r, lorsque les deux cercles sont fixes.*

(E. LEMOINE.)

Solution par M. DÉPREZ. 1° Soit $Oo = d$; on sait que $d^2 = R(R - 2r)$. Décrivons une circonférence ω touchant la droite Oo en o et ayant pour rayon r; menons le diamètre $O\omega$, qui rencontre cette circonférence en A.

(*) Nous avons signalé ce théorème dans notre *Théorie des indices*, N. A. M., 1870 (2), t. IX, p. 410.

(**) Nous avons reçu trop tard pour la mentionner antérieurement une bonne solution de la question 721, par M. Joachimesca.

bles sont oubliés, la réciproque n'est pas établie, des généralisations ou des remarques importantes font défaut, etc.

Les exemples que nous avons donnés ci-dessus sont pris au hasard parmi beaucoup d'autres; la place nous manque pour énumérer toutes les fautes; nous ne pouvons cependant nous dispenser de signaler encore une grossière erreur de calcul (Livre VIII, n° 21) et un raisonnement faux (Livre I, n° 21).

Concluons en disant qu'il y a dans cet ouvrage la matière d'un bon livre; mais pour en tirer ce bon livre, il faudrait le refaire sur un plan nouveau et surtout le revoir avec soin d'un bout à l'autre au double point de vue de la forme et du fond(*).

M. STUYVAERT.

Traité d'Analyse, par É. PICARD, Membre de l'institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome I : Intégrales simples et multiples. — Applications géométriques du calcul infinitésimal, 1891. Paris, Gauthier-Villars et Fils (XII-457 p., in-8)(**). Prix : 15 fr.

Dans ce *Traité d'Analyse*, le savant professeur de la Faculté des sciences de Paris a pour but principal de développer la théorie des équations différentielles. Comme cette partie du calcul intégral est intimement liée à plus d'une autre théorie, l'auteur a cru utile de donner, dans un premier volume, tous les préliminaires indispensables à ceux qui ne connaissent que les élements du calcul différentiel, pour aborder la théorie des équations différentielles.

Dans ce volume, il expose d'abord les éléments du calcul intégral, en insistant sur les notions d'intégrale curviligne et d'intégrale de surface, qui jouent un rôle si important en physique mathématique. La seconde partie traite de quelques applications de ces notions générales; au lieu de prendre des exemples sans intérêt, il développe la théorie de l'équation de Laplace et les propriétés fondamentales du potentiel. On y trouvera ensuite l'étude de quelques développements en séries, particulièrement des séries trigonométriques. La troisième partie est consacrée aux applications géométriques du calcul infinitésimal. Voici au reste le sommaire détaillé des matières du tome premier :

Ire PARTIE. — **Intégrales simples et multiples.** — CHAP. I. *Des intégrales définies.* Définition de l'intégrale définie, ses propriétés fondamentales. Fonction ayant pour dérivée une fonction donnée. Applications géométriques. Intégration par parties. Formule de Taylor. Changement de variable. Extension de la notion d'intégrale définie. Cas où la fonction et où les limites deviennent infinies. Différentiation sous le signe d'intégration. Intégrale d'une fonction complexe d'une variable

---

(*) Nous devons spécialement mettre nos jeunes lecteurs en garde contre l'*Histoire de la Géométrie*, inexacte et incomplète, mise en tête du premier volume. (P. M.)

(**) Les autres volumes contiendront Tome II : Fonctions analytiques. — Principes généraux de la théorie des équations différentielles; Tome III: Équations différentielles ordinaires; Tome IV : Équations aux dérivées partielles.

réelle. — CHAP. II. *Intégrales indéfinies.* Intégrales des fractions rationnelles. Intégrales hyperelliptiques. Intégrales de différentielles algébriques. Intégrales des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$. — CHAP. III. *Intégrales curvilignes.* Définition des intégrales curvilignes. Condition pour que l'intégrale curviligne $\int(P dx + Q dy)$ ne dépende que des limites. De l'intégrale curviligne considérée comme fonction de sa limite supérieure. Exemples d'intégrales effectuées le long d'un contour fermé. Racines communes à deux équations. — CHAP. IV. *Des intégrales doubles.* Définition des intégrales doubles. Changement de variables dans les intégrales doubles. Applications. Volumes et surfaces. Définition des intégrales de surfaces. Condition pour que l'intégrale de surface $\int(A dy dz + B dz dx + C dx dy)$ ne dépende que du contour Formule de Stokes. Racines communes à deux équations. — CHAP. V. *Des intégrales multiples.* Définition et propriétés fondamentales des intégrales multiples. Cas où la fonction devient infinie ou indéterminée. Quelques formules relatives aux intégrales triples. **II^e PARTIE. — L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries.** — CHAP. VI. *De l'équation de Laplace.* Formule fondamentale. Énoncé du principe de Dirichlet. Problème de Dirichlet dans le cas d'une sphère. Sur une généralisation de l'intégrale de Gauss. Principe de Dirichlet pour une surface convexe. — CHAP. VII. *Attraction et potentiel.* Définitions et premières propriétés du potentiel. Formule de Poisson. Propriétés caractéristiques du potentiel. Attraction d'un ellipsoïde. Attraction d'une couche superficielle. Théorème de M. Bertrand. Méthode de M. Robin pour la recherche d'une couche sans action sur un point intérieur. — CHAP. VIII. *Intégrations des séries. Séries entières.* Des séries uniformément convergentes. Des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable. — CHAP. IX. *Des séries trigonométriques.* Généralités. Intégrale de Dirichlet. Série de Fourier. Ordre des coefficients. Sa convergence conforme. Sur les séries trigonométriques les plus générales. Théorème de M. Cantor. L'intégrale de Poisson. Représentation approchée des fonctions. — CHAP. X. *Séries multiples.* Généralités sur les séries multiples. Théorème de Cauchy. Quelques applications. Exemples de séries multiples où les entiers ne sont pas arbitraires. — **III^e PARTIE. — Applications géométriques du calcul infinitésimal.** — CHAP. XI. *Théorie des enveloppes. Surfaces réglées. Congruences et complexes.* Théorie des enveloppes. Surfaces développables. Surfaces réglées. Congruences de droites. Généralités sur les complexes. Complexes linéaires. — CHAP. XII. *Théorie du contact. Courbure.* Contact des courbes planes. Courbure des courbes planes. Développées et développantes. Contact des courbes gauches. Contact des courbes et des surfaces. Remarques sur les courbes gauches algébriques; formules de Cayley. Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. — CHAP. XIII. *Courbure et torsion des courbes gauches. Formules fondamentales.* Courbure et torsion des courbes gauches. Centre de courbure. Formules de Frenet. Quelques applications. Développées des courbes gauches. Hélices. Courbes sphériques. — CHAP. XIV. *Des courbes tracées sur une surface.* De la courbure des courbes tracées sur une surface. Théorèmes d'Euler et de Meunier. Lignes de courbure. Propriétés et équations générales. Théorème de Joachimsthal. Théorème de Dupin. Surface enveloppe de sphères. Cyclide de Dupin. Généralités sur les lignes

asymptotiques. Quelques exemples. Lignes asymptotiques de certaines surfaces réglées. — CHAP. XV. *Surfaces applicables. Représentation conforme. Cartes géographiques.* Expression du carré de l'élément d'arc sur une surface. Représentation conforme d'un plan sur un plan. Quelques exemples de représentation conforme. Sur les substitutions linéaires. Carte d'une surface.

SUR LES MOMENTS D'INERTIE(*);

par M. J. NEUBERG.

1. On sait que le *moment d'inertie* I, par rapport à un plan (P), d'un système de points matériels A_1, A_2, ..., dont les masses sont M_1, M_2, ... est la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à ce plan. Si l'on pose $I = \rho^2 \Sigma M$(**), ρ est le *rayon d'inertie* du système (A) par rapport à (P). Avec M. Darboux, nous dirons aussi que I est le paramètre de (P) par rapport au système (A).

Soient (X_1, Y_1, Z_1), ... les coordonnées rectangulaires de A_1, ..., et soit

$$ux + vy + wz + p = 0$$

l'équation de (P). Alors

$$I(u^2 + v^2 + w^2) = \Sigma M(uX + vY + wZ + p)^2. \qquad (1)$$

L'enveloppe des plans de paramètre nul est la quadrique représentée en coordonnées tangentielles (u, v, w, p) par l'équation

$$\Sigma M(uX + vY + wZ + p)^2 = 0. \qquad (2)$$

Cette surface auxiliaire, considérée par M. Reye et par O. Hesse, peut

---

(*) Cet article tient lieu de solution de la question proposée 310 (*Mathesis*, t. IV, p. 48), laquelle demande une rectification. Nous en avons emprunté les développements, en grande partie, aux auteurs suivants :

REYE. *Beiträge zu der Lehre von den Trägheitsmomenten* (J. de Schlömilch, t. IX, pp. 433-455); *Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen* (J. de Crelle, t. LXXII, pp. 293-326).

O. HESSE. *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*. Leçon XXV.

DARBOUX. *Sur les rapports de la Théorie des moments d'inertie avec celle des surfaces homofocales* (Note XXII de la *Mécanique* de Despeyrous).

(**) Pour simplifier l'écriture, nous écrivons ΣM, ΣMX, ... au lieu de

$$M_1 + M_2 + \cdots \quad M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots \quad \cdots$$

Lorsqu'il s'agit d'un système *continu* de points matériels, ces sommes sont remplacées par des intégrales définies.

être appelée *image d'inertie* du système (A) (*Imaginaires Bild*, d'après Hesse). Si toutes les masses sont positives et non situées dans un même plan, l'image d'inertie est un ellipsoïde imaginaire ; c'est l'hypothèse que nous adoptons d'abord. Il résulte des notions vues en géométrie analytique, qu'il existe un système d'axes rectangulaires, et généralement un seul, par rapport auquel l'équation (2) prend la forme réduite

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Dp^2 = 0. \qquad (3)$$

En adoptant, dès le commencement, ces axes des coordonnées (appelés *axes principaux* d'inertie), nous pouvons identifier les équations (2) et (3), ce qui donne les égalités

$$\begin{array}{llll} \Sigma MX^2 = A, & \Sigma MZ^2 = B, & \Sigma MZ^2 = C, & \\ \Sigma MYZ = 0, & \Sigma MZX = 0, & \Sigma MXY = 0, & \\ \Sigma MX = 0, & \Sigma MY = 0, & \Sigma MZ = 0, & \Sigma M = D. \end{array}$$

On en conclut que le centre de symétrie de l'image d'inertie coïncide avec le centre de gravité G du système matériel ; que D est la masse totale du système et que A, B, C sont les paramètres des plans principaux d'inertie.

Soient a, b, c les rayons d'inertie du système par rapport aux plans principaux d'inertie, de sorte que

$$A = Da^2, \quad B = Db^2, \quad C = Dc^2;$$

l'équation de l'image d'inertie sera, en coordonnées tangentielles,

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2 = 0,$$

et en coordonnées ponctuelles,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

La formule (1) est maintenant remplacée par celle-ci :

$$I(u^2 + v^2 + w^2) = D(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2),$$

ou, à cause de $I = D\rho^2$, par l'égalité

$$(c^2 - \rho^2)u^2 + (b^2 - \rho^2)v^2 + (a^2 - \rho^2)w^2 + p^2 = 0,$$

laquelle exprime que le plan (P) touche la surface représentée en coordonnées ponctuelles par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} + \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} + 1 = 0.$$

Par conséquent : 1° *le carré du rayon d'inertie d'un système matériel par rapport à un plan donné est égal au carré du paramètre de la surface homofocale avec l'image d'inertie et tangente à ce plan ; 2° l'enveloppe des plans de même paramètre est une surface homofocale avec l'image d'inertie.*

2. L'image d'inertie étant rapportée à un tétraèdre conjugué $B_1B_2B_3B_4$ a une équation, en coordonnées tangentielles, de la forme

$$m_1\alpha^2 + m_2\beta^2 + m_3\gamma^2 + m_4\delta^2 = 0,$$

de sorte qu'on peut poser

$$D(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2) \equiv \Sigma m(ux + vy + wz + p)^2, \qquad (4)$$

(x_n, y_n, z_n) désignant les coordonnées de B_n par rapport aux axes principaux d'inertie GX, GY, GZ.

De là le théorème suivant, dû à M. Reye :

Étant donné un système matériel quelconque, il existe une infinité de systèmes de quatre points B_1, B_2, B_3, B_4 *tels, que si on leur attribue des masses convenables* m_1, m_2, m_3, m_4, *leur moment d'inertie par rapport à un plan quelconque est égal à celui du système donné par rapport au même plan. Tous les tétraèdres* $B_1B_2B_3B_4$ *sont conjugués avec l'image d'inertie*(*).

Les deux systèmes matériels (A) et (B) sont *équivalents* relativement à leurs moments d'inertie par rapport à un plan quelconque. Ils ont même image d'inertie, même masse totale, même centre de gravité G. On tire de là les conséquences suivantes :

1° Le choix du point B_1 détermine sa masse m_1, le plan $B_2B_3B_4$ et le centre de gravité des masses m_2, m_3, m_4.

Car le plan $B_2B_3B_4$ est le plan polaire de B_1 ; si h est sa distance à B_1 et I_1 son paramètre, m_1 résulte de l'égalité évidente $I_1 = m_1h_1^2$; le point de rencontre de la droite CB_1 avec le plan $B_2B_3B_4$ est le centre de gravité des masses m_2, m_3, m_4.

(*) Bien que l'image d'inertie soit imaginaire, la construction des tétraèdres conjugués ne présente pas de difficulté. Le plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) a pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} + 1 = 0;$$

il coïncide avec le plan polaire du point $(-x_1, -y_1, -z_1)$, pris relativement à l'ellipsoïde réel qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si l'on exprime que le rapport des distances des points B_i et G au plan polaire de B_i est égal à $\frac{D}{m_i}$, on trouve

$$\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2}+\frac{z_i^2}{c^2}+1=\frac{D}{m_i}.$$

2° Le choix de la droite sur laquelle se trouvent les points B_1 B_2 détermine la droite B_3B_4 et les centres de gravité g, g' des couples m_1 et m_2, m_3 et m_4.

En effet, B_3B_4 est la droite polaire de B_1B_2 et G partage la droite gg' dans le rapport $m_3+m_4 : m_1+m_2$; donc g et g' se trouvent sur la droite qui passe par G et s'appuie sur B_1B_2, B_3B_4, et l'on connaît même les sommes m_1+m_2, m_3+m_4.

3. Prenons la masse totale du système (A) pour unité de masse et introduisons les coordonnées cartésiennes homogènes x, y, z, t ($t=1$). L'identité (4) devient

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2+p^2\equiv \mathbf{S}m\,(ux+vy+wz+pt)^2$$

et conduit aux égalités :

$$\mathbf{S}mx^2=a^2,\quad \mathbf{S}my^2=b^2,\quad \mathbf{S}mz^2=c^2,\quad \mathbf{S}mt^2=1,$$
$$\mathbf{S}myz=0,\quad \mathbf{S}mzx=0,\quad \mathbf{S}mxy=0,\quad \mathbf{S}mxt=0,\quad \text{etc.}$$

Posons

$$\frac{x\sqrt{m}}{a}=\alpha,\quad \frac{y\sqrt{m}}{b}=\beta,\quad \frac{z\sqrt{m}}{c}=\gamma,\quad t\sqrt{m}=\delta;$$

il vient :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1,\\
&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2=1,\\
&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2=1,\\
&\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2=1,\\
&\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3+\beta_4\gamma_4=0,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Or, ce sont là les conditions exprimant que la substitution

$$\mu_r=\alpha_r\nu_1+\beta_r\nu_2+\gamma_r\nu_3+\delta_r\nu_4,\quad (r=1,\,2,\,3,\,4)$$

est orthogonale. On sait qu'elles entraînent les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\delta_1^2=1,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2+\delta_1\delta_2=0,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Donc en revenant aux notations primitives, on peut écrire

$$\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2}+\frac{z_i^2}{c^2}+1=\frac{1}{m_i},$$

. . . . . .

$$\frac{x_i x_k}{a^2}+\frac{y_i y_k}{b^2}+\frac{z_i z_k}{c^2}+1=0,$$

. . . . . .

Ces relations se prêtent à une nouvelle démonstration du théorème de M. Reye.

4. On peut se donner arbitrairement, sous la condition

$$m_1+m_2+m_3+m_4=1,$$

les masses à attribuer aux points du système matériel $B_1B_2B_3B_4$, équivalent à un système proposé (A). Les points B se trouvent, respectivement, sur quatre ellipsoïdes déterminés E_1, E_2, E_3, E_4, représentés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=\frac{1}{m_n}, \quad (n=1, 2, 3, 4).$$

Prenons arbitrairement B_1 sur E_1, B_2 sur l'intersection de E_2 avec le plan polaire de B_1 par rapport à l'image d'inertie E; B_3 sera l'un des points d'intersection de E_3 avec la polaire de la droite B_1B_2, prise relativement à E; enfin B_4 est le pôle du plan $B_1B_2B_3$.

En particulier, soit $m_1=m_2=m_3=m_4=\frac{1}{4}$; le tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ est inscrit à l'ellipsoïde représenté par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3,$$

et peut avoir une infinité de positions(*).

5. Le moment d'inertie d'un système matériel (A) par rapport à un point N ou par rapport à une droite d est la somme des produits des masses du système par le carré de leur distance à ce point ou à cette droite. Inversement, cette somme est appelée le *paramètre* du point ou de la droite par rapport au système (A). Le paramètre d'une droite ou d'un point peut s'obtenir en faisant la somme des paramètres de deux

---

(*) La question 310 est ainsi rectifiée, et résolue complètement.

plans rectangulaires menés par la droite ou de trois plans rectangulaires passant par le point. Il résulte de là que deux systèmes matériels (A) et (B), qui ont même moment d'inertie par rapport à un plan quelconque, ont aussi même moment d'inertie par rapport à un point quelconque ou à un axe quelconque. On a déjà vu que de tels systèmes ont même centre de gravité G, même masse totale que nous supposons égale à l'unité, et même image d'inertie E.

Conservons les notations employées précédemment. Le paramètre de G étant égal à la somme de ceux des plans principaux de E, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \Sigma m \cdot \overline{BG}^2.$$

Celui du point $N(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour expression

$$\Sigma m \left\{ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \right\} (*) = \Sigma m \cdot \overline{GR}^2 + \overline{NG}^2.$$

Donc

$$\Sigma m \cdot \overline{NB}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \overline{NG}^2.$$

Si tous les points B sont sur une même sphère, décrite du centre N avec le rayon R, l'égalité précédente prend la forme

$$-(a^2 + b^2 + c^2) = \overline{NG}^2 - R^2.$$

De là le théorème suivant : *Lorsque des points matériels se trouvent sur une même sphère, la somme des carrés des demi-axes de l'image d'inertie égale la puissance du centre de gravité par rapport à cette sphère.*

En particulier, *tous les systèmes équivalents, composés de quatre points matériels, jouissent de la propriété que les sphères passant par les points d'un système ont pour centre radical commun le centre de gravité.*

Si l'on introduit des masses négatives, l'image d'inertie peut être l'une quelconque des quadriques à centre, pourvu que la somme des masses soit différente de zéro ; par conséquent, *la puissance du centre d'une quadrique par rapport à la sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué quelconque est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes* (**).

(*) On développe cette expression, en ayant égard aux égalités

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0, \quad \Sigma m = 1.$$

(**) Théorème de Faure et Painvin. Voir N. A. M., 1880 (2), t. XIX, p. 290.

Appliquons la règle de la multiplication des déterminants aux deux systèmes d'éléments

$$\left\| \begin{matrix} m_1x_1 & m_2x_2 & \cdots & m_nx_n \\ m_1y_1 & m_2y_2 & \cdots & m_ny_n \\ m_1z_1 & m_2z_2 & \cdots & m_nz_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\|. \qquad (5)$$

En tenant compte des relations (3°), on trouve le déterminant

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2.$$

Mais le résultat est aussi la somme des produits d'un déterminant formé avec quatre colonnes quelconques du premier système par le déterminant homologue déduit du second système. Donc

$$a^2b^2c^2 = 36 \, \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3m_4 \, (\text{vol. } B_1B_2B_3B_4)^2.$$

Soit $n = 4$, et désignons par V_1, V_2, V_3, V_4, V les volumes $GB_2B_3B_4$, $GB_3B_4B_1$, $GB_4B_1B_2$, $GB_1B_2B_3$, $B_1B_2B_3B_4$; par F_1, F_2, F_3, F_4 les aires $B_2B_3B_4$, · ·; par $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ les distances de G aux faces du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$. Comme $m_1 = \frac{V_1}{V}$, ···, nous aurons

$$a^2b^2c^2 = 36 \frac{V_1V_2V_3V_4}{V^2} \text{ (*)}.$$

En supprimant les premières lignes des systèmes (5) et en effectuant le produit des nouveaux systèmes, on trouve

$$a^2b^2 = \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

La somme de cette égalité et des deux égalités analogues donne

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4 \, \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3. \, (\text{aire } B_1B_2B_3)^2.$$

Dans l'hypothèse de $n = 4$, cette relation devient

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{4}{27} F_1F_2F_3F_4 \, \mathfrak{S} \, \delta_1\delta_2\delta_3F_4 = K\nu,$$

(*) Théorème énoncé par Painvin, loc. cit.

K étant un facteur qui ne dépend que du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$, et v désignant le volume du tétraèdre qui a pour sommets les projections de G sur les faces. De là on déduit le théorème suivant : *Lorsque la somme* (algébrique) *des inverses des carrés des axes est nulle, les projections du centre d'une quadrique sur les faces d'un tétraèdre conjugué sont situées dans un même plan*(*).

Les formules suivantes se démontrent de la même manière :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \mathfrak{S} m_1 m_2 \cdot \overline{B_1B_2}^2,$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4\mathfrak{S} m_1 m_2 \cdot (\text{aire } GB_1B_2)^2,$$
$$a^2b^2c^2 = 36\mathfrak{S} m_1 m_2 m_3 (\text{vol. } GB_1B_2B_3)^2.$$

Nous arrêtons ici ces développements, en renvoyant le lecteur qui voudrait approfondir ces questions, aux auteurs déjà cités, et à P. SERRET, *Géométrie de Direction*.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (**).

Question 707.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 80.)

Deux cercles de rayons R, *r ont leurs centres* O, *o sur une droite donnée; ils sont tels qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans le cercle* O *et ayant leurs côtés tangents au cercle o. Cela posé* : 1° *Trouver l'enveloppe du cercle de rayon* R *si le cercle de rayon r est fixe.* 2° *Trouver l'enveloppe du cercle de rayon r si le cercle de rayon* R *est fixe.* 3° *Trouver le lieu du point de Lemoine des triangles inscrits au cercle de rayon* R *et dont les côtés touchent le cercle de rayon r, lorsque les deux cercles sont fixes.*

(E. LEMOINE.)

Solution par M. DÉPREZ. 1° Soit $Oo = d$; on sait que $d^2 = R(R - 2r)$. Décrivons une circonférence ω touchant la droite Oo en o et ayant pour rayon r; menons le diamètre $O\omega$, qui rencontre cette circonférence en A.

(*) Nous avons signalé ce théorème dans notre *Théorie des indices*, N. A. M., 1870 (2), t. IX, p. 410.

(**) Nous avons reçu trop tard pour la mentionner antérieurement une bonne solution de la question 721, par M. Joachimesca.

On a : $\overline{Oo}^2 = OA(OA - 2r)$, d'où l'on conclut $R = OA$. Donc l'enveloppe du cercle O est le cercle ω (et son symétrique par rapport à Oo).

2° Menons sur Oo la perpendiculaire $o\omega = r$; soit Δ la tangente au cercle fixe O, parallèle à Oo. En écrivant la relation $d^2 = R(R - 2r)$ sous la forme $d^2 + r^2 = (R - r)^2$, on voit que la distance ωO est égale à la distance de ω à Δ; donc le point ω parcourt une parabole ayant pour foyer O, pour directrice Δ.

Si l'on prend pour axes Oo et une perpendiculaire en O, le cercle o a pour équation

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - \frac{R^2}{4} = 2dx - \frac{3d^2}{2} + \frac{d^4}{4R^2},$$

d jouant le rôle de paramètre variable. Il est facile d'appliquer la théorie générale des courbes enveloppes.

3° Soit ABC l'un des triangles inscrits au cercle O et circonscrits au cercle o; soient a, b, c les longueurs de ses côtés et S sa surface.

Cherchons d'abord l'enveloppe de la droite de Lemoine du triangle ABC. Pour cela, il suffit de trouver la relation constante entre les distances λ, μ de cette droite aux points fixes O, o.

La distance d'un point à une droite est, en coordonnées trilinéaires normales,

$$\delta = \frac{Mx + Ny + Pz}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2 - 2MN\cos C - 2NP\cos A - 2PM\cos B}}.$$

Or, si ABC est le triangle de référence, la droite de Lemoine a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, et les coordonnées normales absolues des points O, o sont (R cos A, ...), (r, r, r); on en conclut

$$\lambda = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{2\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2}}, \quad \mu = \frac{r(ab + bc + ca)}{\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2}}.$$

D'après des formules connues :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left[\frac{S^2}{r^2} - 4(4R + r)\right], \quad ab + bc + ca = \frac{S^2}{r^2} + r(4R + r),$$

$$\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2 = \left[\frac{S^2}{r^2} - r(4R + r)\right]^2 - 12S^2.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions de λ et μ, et éliminant S entre les nouvelles égalités, on trouve

$$4\lambda^2 r(R+r) - 3\mu^2 R^2 = R^2 r(4R+r).$$

Donc la droite de Lemoine enveloppe une conique Γ.

Le point K de Lemoine décrit la polaire réciproque de Γ par rapport au cercle O; le lieu de ce point est donc une conique.

Remarques. 1° Le centre O_9 du cercle des neuf points de ABC décrit une circonférence; car ce cercle touche le cercle o et a un rayon constant.

Le centre de gravité G et l'orthocentre H du triangle ABC décrivent également des circonférences; en effet, ils divisent la distance OO_9 dans des rapports constants.

Les lieux du point de Nagel et du centre de gravité du périmètre du triangle ABC sont également des circonférences. Cela résulte de ce que ces points partagent la distance oG dans des rapports constants (*).

2° Appelons M et N les inverses du point de Gergonne et du point de Nagel du triangle ABC. Leurs coordonnées normales par rapport à ce triangle sont

$$\cos^2\frac{A}{2},\quad \cos^2\frac{B}{2},\quad \cos^2\frac{C}{2};\quad \sin^2\frac{A}{2},\quad \sin^2\frac{B}{2},\quad \sin^2\frac{C}{2},$$

ou

$$1+\cos A,\quad 1+\cos B,\quad 1+\cos C;\quad 1-\cos A,\quad 1-\cos B,\quad 1-\cos C.$$

Si l'on observe que les coordonnées absolues des points O, o sont $(R\cos A, \ldots), (r, r, r)$, on déduit, des expressions de ces coordonnées, que M et N partagent Oo harmoniquement dans le rapport $r : R$; donc ces points sont fixes. Il en est de même de leurs polaires par rapport au cercle O. Le polaire de M est l'axe antiorthique de ABC (droite passant par les pieds des bissectrices extérieures de ABC).

3° L'axe orthique du triangle ABC enveloppe une conique. Car ses distances aux points O, o sont

$$\lambda = \frac{R\Sigma\cos^2 A}{\sqrt{4\Sigma\cos^2 A - 3}},\quad \mu = \frac{r(R+r)}{R\sqrt{4\Sigma\cos^2 A - 3}},$$

et si l'on élimine $\Sigma\cos^2 A$, il vient

$$4r(R+r)\lambda\mu - 3R^2\mu^2 = r^2(R+r)^2.$$

(*) Comparer N. A. M., 1880, p. 253 (article de M. Weill).

Le pôle de l'axe orthique est l'inverse P du réciproque de l'orthocentre de ABC; donc P décrit une conique.

4° Le cercle de Brocard enveloppe la podaire du point O par rapport à l'ellipse décrite par le point de Lemoine du triangle ABC.

Question 716.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soit n_r le coefficient de x^r dans le développement de $(1+x)^n$. Démontrer les formules

$$n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \frac{1}{3}n_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$n_1 - 2n_2 + 3n_3 - \cdots + (-1)^n(n-1)n_{n-1} + (-1)^{n-1}nn_n = 0\ (*).$$

(*Ed. Times.*)

Solution : 1° Posons

$$u_n = n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \frac{1}{3}n_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n,$$

$$u_{n+1} = (n+1)_1 - \frac{1}{2}(n+1)_2 + \frac{1}{3}(n+1)_3 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}(n+1)_{n+1};$$

nous aurons

$$u_{n+1} - u_n = \sum (-1)^{r-1}\frac{1}{r}[(n+1)_r - n_r] + (-1)^n\frac{1}{n+1}, \qquad (1)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Or,

$$(n+1)_r - n_r = n_{r-1}, \quad \frac{1}{r}n_{r-1} = \frac{1}{n+1}(n+1)_r; \qquad (A)$$

donc l'égalité (1) peut s'écrire

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}[\sum (-1)^{r-1}(n+1)_r + (-1)^n], \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= \frac{1}{n+1}[1 - (1-1)^{n+1}] = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

Donc si l'égalité subsiste pour une valeur de n, elle est vraie pour la

---

(*) Le dernier terme de cette égalité manquait dans l'énoncé.

valeur immédiatement supérieure. Or, on la vérifie aisément pour $n = 1, 2$, etc. (GREENSTREET, EMMERICH).

Autrement. On a

$$(1-x)^n = 1 - n_1 x + n_2 x^2 - \cdots + (-1)^n n_n x^n;$$

$$\frac{(1-x)^n - 1}{x} = -n_1 + n_2 x - \cdots + (-1)^n n_n x^{n-1}.$$

Intégrons les deux membres entre les limites 0 et 1; il vient

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n.$$

Si l'on fait $1 - x = y$, le premier membre de cette égalité devient

$$-\int_1^0 \frac{1-y^n}{1-y}\,dy = \int_0^1 (1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1})\,dy = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ce qui démontre la première formule de la question.

(MANDART, CRISTESCO.)

2° Le premier membre de l'égalité peut s'écrire

$$n - 2\frac{n(-1)}{1.2} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots n}.$$

ou

$$n\left[1 - \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)(n-2\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]$$

ou $$n(1-1)^{n-1};$$

donc il est égal à zéro. (GREENSTREET, CRISTESCO, EMMERICH.)

Autrement. Différentions l'égalité (A) et dans le résultat faisons $n = 1$, etc. (MANDART.)

Pour démontrer la seconde relation de la question, c'est-à-dire la formule

$$C_{n,1} - 2C_{n,2} + 3C_{n,3} \cdots + (-1)^{n+1} nC_{n,n} = 0, \qquad (B)$$

M. SOONS part de la question proposée 505, première partie. Combinant l'égalité (B) avec celle-ci :

$$C_{n,0} - C_{n,1} + C_{n,2} - \cdots + (-1)^n C_{n,n} = 0,$$

il trouve

$$kC_{n,0} - (k-1)C_{n,1} + (k-2)C_{n,2} \cdots + (-1^n)(k-n)C_{n,n} = 0.$$

M. CRISTESCO démontre, en intégrant $(1-x)^n dx$, de 0 à 1, la formule

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}n_1 - \frac{1}{3}n_2 + \frac{1}{4}n_3 - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{1}n_n$$

×Question 717.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soient (C_1), (C_2), (C_3) *trois cercles ayant pour centres les points* C_1, C_2, C_3. *Les cercles décrits des milieux des droites* C_1C_2, C_2C_3 *comme centres et passant respectivement par les points d'intersection de* (C_1) *et* (C_2), (C_2) *et* (C_3) *se coupent sur l'axe radical de* (C_1) *et* (C_3). (Cl. Servais.)

Solution par MM. Emmerich, de Bőzóky, François (La Haye), Déprez, Sollertinsky, Cristesco, Vladimirescu, Soons, Denys *et* M^lle^ de Haas. Soient p_1, p_2, p_3 les axes radicaux des trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) considérés deux à deux, et soit P le centre radical. Une parallèle quelconque à la droite C_1C_3 rencontre les droites C_1C_2, C_3C_2 aux points D_3, D_2. Prenons ces points pour centres de deux cercles (D_3), (D_2) faisant partie des deux faisceaux de cercles déterminés par (C_1) et (C_2), (C_2) et (C_3); p_3 étant l'axe radical de (C_2) et (D_3), p_1 celui de (C_2) et (D_1), leur intersection P est le centre radical des cercles (D_3) et (D_1); l'axe radical des derniers cercles est donc la perpendiculaire abaissée de P sur la droite D_1D_3, c'est-à-dire l'axe radical p_2 des cercles (C_1) et (C_3).

Solution par MM. Mandart *et* Decamps. Soient

$$C_n \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha_n x - 2\beta_n y + \gamma_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3)$$

les équations des cercles donnés. L'équation

$$\frac{pC_1 + qC_2}{p+q} \equiv x^2 + y^2 - 2\frac{p\alpha_1 + q\alpha_2}{p+q} - 2\frac{p\beta_1 + q\beta_2}{p+q} + \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{p+q} = 0$$

représente un cercle (D_3), qui passe par les points d'intersection des cercles (C_1) et (C_2) et divise la distance des centres C_1C_2 dans le rapport $q : p$.

D'après cela, les équations

$$pC_1 + qC_2 = 0, \quad pC_3 + qC_2 = 0 \tag{1}$$

représentent deux cercles (D_3) et (D_1) dont les centres sont sur une parallèle à la droite C_1C_3 et qui passent par les points de rencontre des cercles (C_1) et (C_2), (C_3) et (C_2). Si l'on fait la différence des équations (1) on obtient l'équation de l'axe radical des cercles (D_3) et (D_1); donc, etc.

Remarque. Soient (C_1), (C_2), (C_3) trois petits cercles tracés sur une même sphère. D'un point quelconque de l'axe radical sphérique de (C_1) et (C_3) comme pôle décrivons un grand cercle, qui coupe les arcs de grand

cercle C_1C_2, C_3C_4, aux points D_3, D_4. Les cercles qui ont pour pôles D_3, D_4 et passent respectivement par les points de rencontre des petits cercles (C_1) et (C_2), (C_3) et (C_4) se coupent sur l'axe radical des cercles (C_1) et (C_3).

Ce théorème se démontre de la même manière que celui de la question 717. (DÉPREZ.)

Question 722.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 128.)

Soit O ***le milieu de la distance des points doubles de deux séries projectives superposées, déterminées par les trois couples de points correspondants*** m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1. ***Si*** μ_2, μ_3 ***sont les milieux des segments*** m_3m_1, m_1m_2, ***démontrer que***

$$(Om_1m_2m_3) = -\frac{\mu_2m_2}{\mu_3m_3}. \qquad \text{(CL. SERVAIS.)}$$

Solution par M. VERBESSEM. Soit I le point de la première série qui correspond à l'infini dans la seconde. On a

$$\begin{aligned} Om_1 \,.\, Om_2 - OI \,.\, m_1m_2 + \nu &= 0, \\ Om_2 \,.\, Om_3 - OI \,.\, m_2m_3 + \nu &= 0, \\ Om_3 \,.\, Om_1 - OI \,.\, m_3m_1 + \nu &= 0, \end{aligned}$$

ν étant une constante. En soustrayant la seconde équation de la première et la troisième de la seconde, on trouve

$$Om_2 \,.\, m_2m_1 + OI\,(m_1m_1 + m_3m_3) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{Om_2}{2OI} = -\frac{\mu_2m_2}{m_3m_1},$$

$$\frac{Om_3}{2OI} = \frac{\mu_3m_3}{m_1m_2}.$$

Par division, on obtient

$$\frac{Om_2}{Om_3} : \frac{m_1m_2}{m_1m_3} = -\frac{\mu_2m_2}{\mu_3m_3}. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

504. Trouver le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une parabole qui se transporte parallèlement à elle même de manière que son sommet parcoure une droite donnée.

Équation de la parabole mobile $(y - mx)^2 = 2p(x - \alpha)$, α étant variable. Le lieu cherché est une droite.

505. Résoudre l'équation $\sin x + \sin 2x = a(\cos x + \cos 2x)$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

739. On donne une circonférence Δ, un diamètre AB et une perpendiculaire Δ' à AB. Une droite quelconque menée par A coupe Δ en M, Δ' en N. On tire par M une perpendiculaire à AB, et par N une parallèle à AB. Ces droites se rencontrent en un point P. Trouver les points d'inflexion de la courbe décrite par P. — Même question, lorsque Δ' est parallèle à AB et que MP, NP sont respectivement parallèle et perpendiculaire à AB. (J. Neuberg.)

740. Mettre la relation

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c-\pi) + \cos\tfrac{1}{4}(3a-b-c+\pi) = 0$$

sous la forme

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(-a+b+c) = 1$$

(E. Gelin.)

741. En un point quelconque $M(x, y, z)$ de la surface ayant pour équation $F(x, y, z) = 0$ on mène le plan tangent, qui coupe les axes OX, OY, OZ aux points A, B, C. On construit le parallélipipède ayant pour arêtes OA, OB, OC; soit M' le sommet opposé à O. Trouver le plan tangent au point M' de la surface engendrée par ce point lorsque M se déplace sur la surface donnée. (J. Neuberg.)

742. Une tangente à une ellipse rencontre le cercle principal aux points M, M'; démontrer que les diamètres conjugués avec ceux qui passent par M et M' rencontrent la tangente sur les directrices.

(W. J. Greenstreet, M. A.)

La proposition est connue sous un énoncé un peu différent. Quelle est l'analogue dans l'ellipsoïde ? (J. N.)

SUR LES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE

qui ont trois points doubles d'inflexion et en particulier sur la Kreuzcurve;

par M. BALITRAND, ancien élève de l'École polytechnique.

Laguerre s'est occupé de ces courbes dans un article inséré en 1878 dans les *Nouvelles Annales* (pp. 337 et suivantes). Il a démontré cette belle propriété : La cubique polaire d'un point M de la courbe se décompose en une conique (conique harmonique du point M) et une droite (droite harmonique du point M). D'où il résulte que : Les points de contact des tangentes issues du point M à la courbe sont en ligne droite. Si deux des points doubles deviennent les ombilics du plan, la courbe correspondante est une lemniscate, dont Laguerre a signalé de nombreuses propriétés dans son mémoire. On rencontre encore parmi ces courbes la Kreuzcurve, qui a été étudiée récemment par différents géomètres, et dont nous indiquerons quelques propriétés.

I. Si l'on prend le triangle des points doubles A, B, C pour triangle de référence, l'équation générale de ces courbes est

$$ly^2z^2 + mx^2z^2 + nx^2y^2 = 0. \tag{1}$$

Les coefficients l, m, n ne sauraient être tous positifs; sans quoi la courbe serait imaginaire. Nous pouvons supposer

$$l > 0, \quad m > 0, \quad n < 0.$$

Dès lors A et B sont des points doubles réels, C est un point double isolé.

Les équations des tangentes aux points doubles sont :

$$\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0, \quad \frac{z^2}{n} + \frac{x^2}{l} = 0, \quad \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} = 0. \tag{2}$$

Elles rencontrent les côtés opposés en six points situés sur la conique

$$\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0, \tag{3}$$

conjuguée par rapport au triangle ABC.

Si l'on retranche deux à deux les équations (2) on obtient

$$(4) \qquad \frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{l}=0, \quad \frac{z^2}{n}-\frac{y^2}{m}=0, \quad \frac{x^2}{l}-\frac{z^2}{n}=0.$$

L'équation

$$\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{l}=0,$$

représente deux droites issues du sommet C et passant par les points d'intersection des tangentes en A et B. Ces deux droites sont réelles, et forment un faisceau harmonique avec les côtés CA, CB; et aussi avec les tangentes en C à la courbe du quatrième ordre. Les autres équations (2) donnent lieu aux mêmes remarques, mais les droites qu'elles représentent sont imaginaires.

II. La conique représentée par l'équation (3) est l'enveloppe des droites harmoniques des différents points de la courbe; c'est aussi le lieu des pôles des côtés du triangle ABC relativement aux coniques harmoniques des différents points de la courbe (LAGUERRE, *loc. cit.*).

La considération de cette conique conduit à une construction par points de la courbe représentée par l'équation (1). Je mène la tangente en un point P à cette conique, et je joins les sommets A, B, C aux points où cette tangente coupe les côtés opposés. Ces droites forment un triangle dont les sommets décrivent la courbe (1), lorsque le point P se meut sur la conique (3). Les droites AP, BP, CP coupent les côtés opposés en trois points qui déterminent un triangle : les côtés de ce triangle ont pour enveloppe la polaire réciproque de la courbe (1) par rapport à la conique (3). Cette courbe est du sixième ordre. Les côtés du triangle ABC sont des tangentes doubles de rebroussement et les points de rebroussement sont les points d'intersection des côtés du triangle ABC avec la conique (3).

On peut encore rattacher la génération par points de la courbe (1) à une autre méthode de transformation quadratique : la transformation par points inverses. Elle est, en effet, la transformée par points inverses de la conique

$$(5) \qquad lx^2+my^2+nz^2=0,$$

c'est-à-dire que si une conique inscrite au triangle de référence varie de façon que l'un de ses foyers reste sur la conique (5), l'autre foyer décrit la courbe (1).

III. Étant donnés une ellipse C de centre O, et le triangle (conjugué à cette conique) formé par la droite de l'infini et les axes de l'ellipse, on arrive à la *Kreuzcurve* par la construction suivante qui ne diffère pas de la construction indiquée au paragraphe II. La tangente en un point M à l'ellipse coupe les axes aux points A et B; les parallèles aux axes menées par ces points se rencontrent en M_1 : le lieu du point M_1 est la Kreuzcurve.

L'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{6}$$

celle de la Kreuzcurve est

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}-1=0, \tag{7}$$

et si φ désigne l'anomalie excentrique du point M, les coordonnées du point M_1 sont :

$$x=\frac{a}{\cos\varphi},\quad y=\frac{b}{\sin\varphi}.$$

La droite qui joint les projections A_1, B_1 du point M sur les axes, a pour équation

$$\frac{x}{a\cos\varphi}+\frac{y}{b\sin\varphi}-1=0. \tag{8}$$

Elle reste constamment normale à l'ellipse

$$b^2y^2+a^2x^2=\frac{a^4b^4}{c^4}, \tag{9}$$

et a pour enveloppe la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0,$$

qui est la développée de l'ellipse précédente et qui présente quatre points de rebroussement aux sommets de l'ellipse C. La Kreuzcurve est la polaire réciproque de cette courbe par rapport à l'ellipse C.

La tangente à la Kreuzcurve au point M_1 a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos^3\varphi+\frac{y}{b}\sin^3\varphi-1=0. \tag{10}$$

Elle passe par le point d'intersection des droites représentées par les équations :

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi-1=0, \tag{11}$$

$$\frac{x}{a\cos\varphi}+\frac{y}{b\sin\varphi}=0. \tag{12}$$

Ce sont : la tangente en M à l'ellipse C et le diamètre conjugué à OM_1.

En effet, il suffit de retrancher les équations (11) et (12) après avoir multiplié la seconde par $\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ pour retrouver l'équation (10).

Les coordonnées du point P, intersection des droites (11) et (12), sont données par les formules

$$\frac{x}{a}=\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi},\quad \frac{y}{b}=\frac{-\sin\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}.$$

On en déduit

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi},\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi},$$

puis

$$\cos\varphi=ab\frac{bx}{(bx+ay)(bx-ay)},\quad \sin\varphi=-ab\frac{ay}{(bx+ay)(bx-ay)},$$

et, par suite, le lieu du point P est représenté par l'équation

$$(bx+ay)^2(bx-ay)^2=\frac{a^2b^2}{2}[(bx+ay)^2+(bx-ay)^2]. \tag{13}$$

Mais si l'on prend pour nouveaux axes de coordonnées les droites

$$bx+ay=0,\quad bx-ay=0,$$

c'est-à-dire les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, l'équation (13) prend la forme

$$X^2Y^2=K^2(X^2+Y^2)$$

et l'on voit qu'elle représente une Kreuzcurve.

IV. Pour terminer, nous donnerons, au moyen de la représentation paramétrique de la Kreuzcurve, une solution très simple de la question 1569 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Nous avons vu que la droite A_1B_1, qui joint les projections du point M sur les axes, était la polaire du point M_1 par rapport à l'ellipse C. Il s'agit donc de trouver le lieu

du point de rencontre Q des normales à l'ellipse C aux points où elle est coupée par A_1B_1.

Du point Q menons les deux autres normales à l'ellipse, puis les tangentes aux points d'incidence. Elles se coupent au point M' (α, β); et d'après les formules de Joachimsthal, il existe entre les coordonnées des points M_1 et M' les relations

$$\frac{a\alpha}{\cos\varphi} = -a^2, \quad \frac{\beta b}{\sin\varphi} = -b^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le point M' est donc sur l'ellipse C, et par suite le point Q appartient à la développée de cette ellipse.

SUR UN THÉORÈME DE M. SHARP(*);

par M. E. CATALAN.

Ce théorème consiste en ce que l'on a

$$\frac{x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} = \textit{entier}(**),$$

si n est *impair* et premier avec 5.

Si, au lieu de la fraction précédente, on considère celle-ci :

$$\frac{x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = y,$$

y est un polynôme *entier*; en sorte que la restriction n *impair* devient inutile. En effet,

$$y = \frac{x^{5n} - 1}{x^n - 1} \times \frac{x - 1}{x^5 - 1} = \frac{(x-1)(x^{5n} - 1)}{(x^n - 1)(x^5 - 1)}.$$

(*) *Mathesis*, septembre 1891, p. 208.

(**) Dans *Mathesis*, l'exposant n a été omis dans x^n.

Or, en général, les nombres entiers p, q étant premiers, entre eux :

$$\frac{(x-1)(x^{pq}-1)}{(x^p-1)(x^q-1)} = \textit{entier}\ (*).$$

Dans le cas de la *question proposée*, si l'on prend $n=3$, le quotient Q équivaut à

$$\frac{x^{12}-x^9+x^6-x^3+1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{x^{15}+1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x^5+1}.$$

Le degré de ce quotient est

$$15+1-3-5=8.$$

On peut le former aisément, de la manière suivante, déjà indiquée.

Développant en série, on a

$$Q=(1+x)(1+x^{15})(1-x^3+x^6-\cdots)(1-x^5+x^{10}-\cdots);$$

ou, en négligeant les termes dont le degré surpasse 8,

$$\begin{aligned} Q&=(1+x)(1-x^3+x^6)(1-x^5)=(1+x)(1-x^3+x^6-x^5+x^8)\\ &=1-x^3-x^5+x^6+x^8+x-x^4-x^6+x^7\\ &=1+x-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8. \end{aligned}$$

En effet, le produit de ce polynôme, par

$$1-x-x^2-x^3+x^4 \quad \text{est} \quad 1-x^3+x^6-x^9+x^{12}.$$

Liège, 1er octobre 1891.

×QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Limite d'un quotient.

1. Théorème. *La limite du quotient de deux variables commensurables, dont chacune a une limite commensurable, est égale au quotient de ces limites.*

Soient u, v deux variables commensurables, positives ou négatives, ayant respectivement pour limites les constantes a, b. Cela signifie que les différences

$$\alpha = u-a, \quad \beta = v-b,$$

(*) *Mathesis*, tome X, p. 241.

peuvent devenir et rester aussi petites que l'on veut, en valeur absolue. Posons

$$\delta = \frac{u}{v} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}.$$

On aura

$$\delta = \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Je dis que δ peut devenir et rester aussi petit que l'on veut, en valeur absolue, quand α et β deviennent et restent suffisamment petits. En effet, rendons β inférieur à $\frac{1}{2}b$; alors δ sera, en valeur absolue, compris entre

$$\frac{\alpha b - a\beta}{b(b-\frac{1}{2}b)} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\frac{1}{2}b)},$$

et, par suite, toujours inférieur, en valeur absolue, à

$$\frac{\alpha b - a\beta}{\frac{1}{2}b^2} = \alpha\frac{2b}{b^2} - \beta\frac{2a}{b^2}.$$

On peut choisir α et β de manière que l'on ait toujours, en valeur absolue,

$$\alpha\frac{2b}{b^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha < \frac{\varepsilon b}{4}, \quad \beta\frac{2a}{b^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad \beta < \frac{\varepsilon b^2}{4a},$$

et, par suite, en valeur absolue aussi, $\delta < \varepsilon$, ε étant une quantité positive aussi petite qu'on le veut, choisie d'avance. On a donc, d'après la définition de la limite,

$$\lim\frac{u}{v} = \frac{a}{b}, \quad \text{ou} \quad \lim\frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}. \tag{1}$$

2. Remarques. I. La démonstration précédente subsiste, si l'une des quantités u, v est constante, ou si l'une des différences α, β est nulle.

II. Il en est de même si le quotient $(u : v)$ est constant, bien que le dividende et le diviseur soient variables. Alors δ est une constante; mais cette constante ne peut être différente de zéro, sans quoi on ne pourrait avoir $\delta < \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut. On a donc

$$\delta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{u}{v} = \frac{a}{b},$$

égalité qui prend la forme (1), si l'on se souvient que, par définition, la limite de la quantité constante $(u : v)$ est cette constante même.

III. La démonstration précédente suppose que les limites a, b, sont finies, puisque, dans le cas contraire, les égalités $\alpha = u - a$, $\beta = v - b$, n'auraient plus aucun sens.

La démonstration suppose aussi que b est différent de zéro. Si l'on avait $b = 0$, a différent de zéro, on aurait

$$\lim \frac{v}{u} = \frac{0}{a} = 0;$$

autrement dit, d'après la définition d'une limite infinie,

$$\lim \frac{u}{v} = \infty .$$

Pour a fini, $b = \infty$, l'expression

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{v}$$

a un numérateur qui reste inférieur à une quantité M que l'on peut assigner; le dénominateur croît indéfiniment. Par suite, en valeur absolue, $(u : v)$ est moindre que $(M : v)$, quantité qui peut devenir et rester aussi petite qu'on le veut. Donc $\lim (u : v) = 0$.

On peut regarder ce résultat et le précédent comme contenus dans la formule (1), si l'on considère les symboles

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{a}{\infty}$$

comme équivalents à ∞ et à 0.

Enfin, si l'on a simultanément $a = 0$, $b = 0$, ou $a = \infty$, $b = \infty$, le second membre de (1) prend l'une ou l'autre des formes indéterminées

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} .$$

Bien loin que, dans ce cas, le second membre de (1) fasse connaître la valeur du premier, c'est le plus souvent le premier qui, par convention, est regardé comme donnant la valeur du second.

3. ***Définition du quotient*** $(\lambda : \mu)$ ***de deux nombres incommensurables*** λ, μ. Pour fixer les idées, nous supposerons λ, μ positifs. 1° Soient l, m deux nombres commensurables variables croissants, et L, M, deux nombres commensurables décroissants, ayant respectivement les nombres λ, μ pour limites. On a donc

$$\lim (L - l) = 0, \quad \lim (M - m) = 0,$$

2° Puisque l'on a

$$l < \mathrm{L}, \quad m < \mathrm{M},$$

on a aussi

$$\frac{l}{\mathrm{M}} < \frac{\mathrm{L}}{m}.$$

Le quotient $(l : \mathrm{M})$, évidemment croissant et inférieur à l'une quelconque des valeurs de $(\mathrm{L} : m)$ a une limite finie x, d'après le principe fondamental de la théorie des limites(*).

3° Le quotient $(\mathrm{L} : m)$, évidemment décroissant et supérieur à l'une quelconque des valeurs de $(l : \mathrm{M})$, a aussi une limite finie K.

4° $\mathrm{K} = x$. Car, soit s'il est possible, c un nombre commensurable compris entre x et K et tel, par conséquent, que l'on ait

$$\frac{l}{\mathrm{M}} < c < \frac{\mathrm{L}}{m}.$$

On déduit de là

$$c - \frac{l}{\mathrm{M}} < \frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\mathrm{L}}{m} - c < \frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{LM} - lm}{m\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{L}(\mathrm{M} - m) + (\mathrm{L} - l)m}{\mathrm{M}m}.$$

Si l'on suppose l, m, L, M compris entre P et $\mathrm{Q} > \mathrm{P}$, on a

$$\frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}} < \frac{\mathrm{Q}(\mathrm{M} - m) + \mathrm{Q}(\mathrm{L} - l)}{\mathrm{P}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}^2}[(\mathrm{M} - m) + (\mathrm{L} - l)]$$

inégalité d'où il résulte que la différence

$$\frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}}$$

peut, comme $\mathrm{M} - m$ et $\mathrm{L} - l$, devenir et rester aussi petits qu'on le veut. Il en est donc de même des quantités plus petites

$$c - \frac{l}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\mathrm{L}}{m} - c,$$

c'est-à-dire que

$$\lim \frac{l}{\mathrm{M}} = c, \quad \lim \frac{\mathrm{L}}{m} = c,$$

(*) *Un nombre toujours croissant (ou toujours décroissant) a une limite finie ou infinie* (Voir *Mathesis*, t. V, pp. 193-196).

ou $\varkappa = c$, $K = c$, ce qui est contraire à l'hypothèse que $\varkappa$, K sont inégaux. On a donc $K = \varkappa$.

5° Les quotients

$$\frac{l}{m}, \quad \frac{L}{M}$$

intermédiaires entre $(l : M)$, $(L : m)$, ont aussi $\varkappa$ pour limite (*).

6° En résumé, les quatre quotients

$$\frac{l \text{ ou } L}{m \text{ ou } M}$$

ont une limite commune $\varkappa$. Par conséquent, on peut donner la définition suivante :

Le quotient (λ, μ) ***des nombres incommensurables*** λ, μ ***est la limite*** $\varkappa$ ***du rapport des nombres commensurables*** l ***ou*** L, m ***ou*** M, ***qui ont respectivement*** λ, μ ***pour limite.***

4. *Le quotient* $(\lambda : \mu)$ ***est unique.*** Soient l', m' deux nombres commensurables croissants, L', M' deux nombres commensurables décroissants ayant aussi respectivement λ, μ pour limites. On prouve, comme plus haut, que les quatre quotients

$$\frac{l' \text{ ou } L'}{m' \text{ ou } M'}$$

ont une limite commune $\varkappa'$. Je dis que $\varkappa' = \varkappa$. En effet, d'après la définition des nombres l, m, l', m', L, M, L', M', on a

$$l' < L, \quad m' < M, \quad l < L', \quad m < M'.$$

Par suite,

$$\frac{l'}{M'} < \frac{L}{m}, \quad \frac{l}{M} < \frac{L'}{m'}$$

et, d'après un principe de la méthode des limites (**)

$$\varkappa' \leqq \varkappa, \quad \varkappa \leqq \varkappa',$$

relations d'où il résulte que $\varkappa' = \varkappa$.

(*) *Si deux quantités variables ont une limite commune, toute quantité intermédiaire a la même limite* (Voir ***Mathesis***, t. VI, pp. 268-269).

(**) *La limite d'une variable toujours supérieure à une autre variable est égale ou supérieure à la limite de celle-ci* (Voir ***Mathesis***, t. VI, pp. 269-271).

5. ***Limite du quotient de deux variables commensurables ou incommensurables.*** La démonstration de la relation

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \qquad (C)$$

donnée plus haut (n° 1), avec les restrictions indiquées au n° 2, s'applique seulement au cas où tous les nombres considérés sont commensurables.

Maintenant que nous avons établi le sens exact que l'on peut attribuer au quotient de deux nombres incommensurables, la démonstration peut être étendue, avec des modifications faciles à imaginer, au cas où l'une ou plusieurs des quantités u, v, $(u : v)$, lim u, lim v, lim $(u : v)$ sont incommensurables. La relation (C) peut donc être regardée comme établie d'une manière générale. (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès-sciences physiques, par M. l'abbé STOFFAES, professeur à la Faculté catholique des Sciences de Lille. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1891 (VII-431 pp. in-8°) Prix : fr. 8,50.

Belanger a publié, en 1842, la première édition, en 1859, la seconde édition de l'ouvrage intitulé : ***Résumé de leçons de Géométrie analytique et de Calcul infinitésimal***, contenant les connaissances strictement nécessaires aux ingénieurs pour l'intelligence de la Mécanique rationnelle et de la Mécanique appliquée. M. l'abbé STOFFAES vient de faire paraitre un livre semblable destiné aux candidats à la licence ès-sciences physiques et qui pourra rendre aux aspirants ingénieurs civils les mêmes services que l'ouvrage de Belanger. Voici un extrait de la table des matières qui donnera une idée des sujets abordés dans le *Cours de Mathématiques supérieures*.

I^re^ PARTIE. **Analyse algébrique et infinitésimale**. LIVRE I. *Compléments d'Algèbre élémentaire.* 1. Calcul des radicaux. 2. Arrangements, permutations, combinaisons. 3. Expressions imaginaires. 4. Séries. 5 Logarithmes. — LIVRE II. *Dérivées et Différentielles.* 1. Notions préliminaires sur les fonctions, les infiniment petits et leurs divers ordres. 2. Dérivées. 3. Calcul des dérivées. 4. Différentielles. 5. Différentielles de quelques fonctions définies géométriquement. 6. Changement de variables. 7. Développement des fonctions en séries. 8. Théorie des maxima et des minima. 9. Expressions qui se présentent sous forme indéterminée. — LIVRE III. *Fonctions primitives ou intégrales.* 1. Règles pour l'intégration des fonctions. 2. Intégration des fonctions rationnelles. 3. Intégration des radicaux carrés du second degré. 4. Intégration de quelques fonctions transcendantes.

5. Intégrales définies. 6. Applications géométriques du Calcul intégral. 7. Intégration et différentiation sous le signe $\int$. 8. Intégration des différentielles qui dépendent de plusieurs variables. — LIVRE IV. *Équations différentielles.* 1. Définition et formation des équations différentielles. 2. Equations différentielles du premier ordre et du premier degré. 3. Équations différentielles du premier ordre et d'un degré supérieur au premier. 4. Équations différentielles du second degré. 5. Equations différentielles simultanées. 6. Équations aux dérivées partielles.

II^e^ PARTIE. **Géométrie analytique plane.** — 1. Des coordonnées. 2. Transformation des coordonnées. 3. Ligne droite. 4. Courbes du second degré. 5. Centres, diamètres et axes. 6. Foyers et directrices. 7. Tangentes. 8. Courbes enveloppes. 9. Courbure des lignes planes. 10. Développées 11. Asymptotes. 12. Points singuliers. 13. Construction des courbes. 14. Détermination des courbes du second degré.

III^e^ PARTIE. **Géométrie analytique dans l'espace.** 1. Projections et coordonnées. 2. Transformation des coordonnées. 3. Du plan. 4. Ligne droite. 5. Plan tangent. 6. Surfaces enveloppes. 7. Génération des surfaces.

Comme Belanger, M. l'abbé Stoffaes a tâché d'être à la fois clair et rigoureux, tout en étant aussi concis que possible. En général, il a réussi. Cependant dans une seconde édition, il y aurait lieu d'introduire des corrections, des simplifications ou des modifications, dans un certain nombre de passages, dont voici une liste assez complète :

N^os^ 41 (Démonstration non générale); 55 (D. insuffisante); 57 (D. trop compliquée); 77 (définition inexacte des fonctions algébriques); 79 (à supprimer les mots: *et que l'on considère dans un état très voisin de sa limite,* auxquels on ne peut donner aucun sens précis); 79 (D. insuffisante relative à $x - \sin x$); 88 (Enoncé faux, D. insuffisante); 90 (D. géométrique de la réciproque insuffisante); 99 (D. fausse); 102 (Insuffisant); 114 (La relation entre arc cos x et arc sin x est plus compliquée); 118 (Dans $dy = y'\Delta x$, Δx est quelconque, même croissant indéfiniment ou imaginaire); 122 (théorème faux, même pour une fonction entière du second degré); 127 (D. très insuffisante pour les courbes gauches); 135, 136 (La suite indéfinie porte seule le nom de *série*); 136, 3° (u_n doit être supposé différent de zéro); 141-145 (Théorie insuffisante — le cas où $f'x$ est discontinue est oublié, — et trop compliqué : on n'a pas besoin du théorème de Taylor); 146 (La règle relative aux expressions $\infty : \infty$, qui pratiquement, est inutile, est mal démontrée); 149 (Le mot *limite* manque devant l'avant-dernière expression); 163 (D. fausse); 166 (Rien ne prouve que la valeur trouvée sera plus approchée); 167 (la démonstration géométrique permet d'assigner la limite de l'erreur); 177-180 (Ici et ailleurs, emploi abusif des infiniment petits, qui n'abrége en rien les démonstrations, mais habitue le lecteur à une fausse conception des méthodes de l'analyse infinitésimale); 182-186 (Démonstrations fausses); 187 (Méthode trop difficile à exposer rigoureusement, l'autre est simple et courte); 190, 191 (Il faudrait avertir le lecteur que les assertions qui terminent ces n^os^ sont très difficiles à établir); 196 (Le cas où $\varphi u + u\psi u = 0$ est oublié); 199 (assertion finale difficile à prouver); 201 (Confusion des *courbes enveloppes,* qui peuvent n'être pas tangentes, avec les *courbes tangentes,* qui représentent les solutions singulières et

peuvent n'être pas enveloppes) ; 210, 219 (la méthode de Brisson est plus simple et plus facile à exposer rigoureusement) ; 218 (insuffisant) ; 312, 315, 319 (la question du signe de la sous-tangente et de la sous-normale n'est pas précisée) ; 325, 447 (D. insuffisante), 330, 335 (insuffisant) ; 361, fin (ajouter : quand cette tangente existe. Il y a des courbes qui ont une asymptote, sans avoir de tangente à l'infini).

En résumé, le livre de M. l'abbé Stoffaes est conçu sur un plan excellent, mais dans la partie relative à l'analyse infinitésimale, il doit être retouché au point de vue de la rigueur et de la simplicité. (P. M.)

Tres capitulos de Geometria superior por J. Durán Loriga, capitan de artilleria. La Coruña, Puga (48 p. in-8° et 1 pl.). Prix : 3 pesetas.

Notions de géométrie supérieure exigées à l'examen d'entrée à l'École générale préparatoire des Ingénieurs et Architectes.

Sommaire. 1. Principe des signes. 2. Rapport anharmonique de quatre points d'une droite, ou de quatre droites d'un faisceau. 3. Rapport harmonique. 4. Homographie et involution. 5. Équation qui exprime l'homographie des faisceaux. 6. Relation anharmonique de quatre plans.

B. V. Moreira de Sa, professor da escola normal do Porto. *Arithmetica* para uso dos lyceus e escolas normaes. Com um juizo critico do ex^mo^ Sn. Dr. F. Gomes Teixeira. Lisboa, A. Ferreira Machado et C^a^, 1891 (xiii-602-iv p. in 12) Prix 1200 reis (= 7 fr. environ).

Sommaire. Appréciation critique favorable de M. Teixeira. Notions préliminaires (55 pages). 1^ere^ *partie :* Nombres abstraits. I. *Nombres entiers.* 1. Numération. 2. Opérations. 3-7 Propriétés des nombres. II. *Fractions.* 1. Ordinaires. 2 Décimales. 3. Approximations. 4. Fractions décimales periodiques. III. *Nombres irrationnels.* 1. Incommensurables. 2. Limites. IV. *Comparaison des nombres.* 1. Proportions. 2. Nombres négatifs. 3. Progressions. 4. Logarithmes. 2^me^ *partie.* Nombres concrets. I. *Nombres complexes.* II. *Applications de l'arithmétique* (règle de trois, d'intérêt, etc).

Function und Begriff. Vortrag von Dr. G. Frege, Professor an der Universität Jena Jena, Pohle, 1891 (31 p. in 8°). Prix : Mark 1,20.

Dissertation peu claire sur la distintion à faire entre une fonction et la valeur d'une fonction, et sur l'emploi des signes + et — en logique générale.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

12. ***Sur les lignes de force***, par M. C. E. Wasteels, professeur agrégé. On sait que les lignes de force sont des lignes telles qu'en tous leurs points la force leur est tangente ; elles coupent orthogonalement les surfaces équipotentielles.

Dans quelques traités de physique, on attribue à ces lignes une propriété qu'elles n'ont pas ; on dit, notamment, qu'une ligne de force est le chemin suivi par un point abandonné à lui-même et sollicité par la force considérée. Or, il est aisé de voir qu'une ligne de force ne peut jouir de cette propriété que si elle est droite.

En un point quelconque de la ligne de force, la force est tangente à cette ligne ; il en est donc de même de l'accélération dans le cas où la force fait décrire la ligne de force ; par suite, la composante normale de l'accélération est partout égale à zéro ; on a donc, en un point quelconque de la courbe : $\frac{v^2}{\rho} = 0$, v étant la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire. Donc, on a constamment $\rho = \infty$, ce qui montre que la ligne est une droite.

×**13.** *Construction d'une troisième proportionnelle.* Pour construire l'expression $x = \frac{a^2}{b}$, décrivons un cercle quelconque O ; prenons une corde $AB = b$, et du point A comme centre, avec le rayon a, décrivons une seconde circonférence coupant la première en C et D. Soit X le point d'intersection des cordes AB, CD ; AX sera la troisième proportionnelle cherchée.

En effet, les triangles ADX, ABD sont équiangles, etc. (Cl. Thiry.)

×**14.** *Sur une formule de Lagrange.* (Extrait d'une lettre de M. Cl. Thiry.)

« Dans le N° d'août-septembre de *Mathesis* (1891, p. 184), M. Poulain fait observer que *l'omniformule métrique du triangle* est un cas particulier d'une formule générale de Lagrange. J'avais rencontré antérieurement cette relation générale sans savoir qu'elle fût de Lagrange.

En effet, j'ai donné, sans trigonométrie, à la page 72 de mes *Applications du théorème de Stewart et Théorie du Barycentre*, la formule de Lagrange [formule (3) de la p. 72], et j'ai fait remarquer en note, que la formule (P) de la p. 35 de cet ouvrage peut se déduire de la formule générale. Ce n'est qu'après avoir trouvé l'omniformule métrique que j'ai vu qu'elle pouvait se déduire de celle de Lagrange, parce que le point K_n est le barycentre du triangle ABC dont les sommets sont chargés de masses a^n, b^n, c^n.

×**15.** *Sur les formules relatives aux polygones réguliers.* Au sujet des formules données par M. l'abbé Gelin (*Mathesis*, 1891, (2), I, pp. 160-164)

on peut remarquer que les formules V_4 et V_5 en fonction de a et de R ont été publiées, en 1843 et 1844, par M. Huet (N. A. M., II, 353-357, 474-480, III, 361-365, 393-400). Le développement des premières formules est exposé d'une manière très détaillée, puis l'auteur y parvient beaucoup plus rapidement par le théorème de Guldin. (H. Brocard.)

16. *Sur la question* 691. (Extrait d'une lettre de M. V. Jamet.) « A propos de la question 691, je prie le lecteur de vouloir bien considérer comme non avenus les résultats que j'avais cru établir en ce qui concerne les intégrales abéliennes de la courbe représentée par les équations de la page 200. La page 201 renferme une faute de calcul, dans l'expression de

$$d\left(\frac{u^7\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}{u^2-1}\right).$$

En calculant correctement cette différentielle, le lecteur verra que, parmi les intégrales que je voulais étudier, il y en a une de première espèce, et une seule : ceci devait être, puisqu'il s'agit, en définitive, d'une courbe du genre un. »

QUELQUES THÉORÈMES

sur le centre des moyennes distances d'un système de points;

par M. H. Van Aubel, professeur à Anvers.

Lemme. *Si* G, G′ *sont les centres des moyennes distances des sommets de deux polygones* $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1A_2\ldots A_n$ *ayant* $n-1$ *sommets communs, la droite* GG′ *est parallèle à* A_1B_1 *et égale à* $\frac{1}{n}A_1B_1$.

Autrement dit, *étant donné un système de n points; si un point* A_1 *du système éprouve un déplacement* A_1B_1, *le centre de gravité* G *éprouve un déplacement* GG′ *parallèle à* A_1B_1 *et égale à* $\frac{1}{n}A_1B_1$.

En effet, soit O le *c.d.m.d.* des points $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Les points G, G′ divisent les droites OA_1, OB_1 dans le rapport $1 : n-1$; donc les triangles OGG′, OA_1B_1 sont semblables, par suite GG′ est parallèle à A_1B_1 et égale à $\frac{1}{n}A_1B_1$.

I. *Soient* G, G′ *les c. d. m. d. des deux systèmes de n points*, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *: le droite* GG′ *est parallèle à la résultante des n droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ *et égale à la n^e^ partie de cette résultante.*

En effet, pour passer du premier système au second, imprimons successivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les déplacements $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_nB_n$, alors, si $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ désignent les *c. d. m. d.* des systèmes $B_1A_2A_3 \ldots A_n$, $B_1B_2A_3 \ldots A_n$, $\ldots$, $B_1B_2 \ldots B_{n-1}A_n$, les côtés de la ligne polygonale $GG_1G_2 \ldots G_{n-1}G'$ sont parallèles aux droites $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ et égales aux n^{es} parties de ces droites.

II. *Si deux systèmes de n points*, $A_1A_2 \ldots A_n$ *et* $B_1B_2 \ldots B_n$, *ont même c. d. m. d., les droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_nB_n$ *sont égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé de n côtés.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent.

III. *Étant donnés deux polygones de n côtés*, $A_1A_2 \ldots A_n$ *et* $C_1C_2 \ldots C_n$, *si l'on mène les droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_nB_n$ *égales et parallèles aux côtés* $C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_nC_1$ *du second polygone, les deux systèmes de points* $A_1, A_2 \ldots A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ *ont même c. d. m. d.*

Ce théorème est le réciproque du précédent. En voici des cas particuliers remarquables.

Si l'on divise les côtés $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ *d'un polygone fermé, aux points* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *dans un même rapport* $\frac{p}{q}$, *le polygone* $B_1B_2, \ldots, B_n$, *a même centre de gravité que le premier.*

Si sur les côtés d'un polygone fermé $A_1A_2 \ldots A_n$, *on construit des triangles directement semblables* $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3, \ldots, A_nB_nA_1$, *les polygones* $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ *ont même c. d. m. d.* (Théorème de M. Laisant.)

Si par un point O *on mène des droites* $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$ *égales et parallèles aux côtés* $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ *d'un polygone fermé de n côtés, ce point sera le c. d. m. d. du système des points* $B_1B_2 \ldots B_n$. En effet, les extrémités $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de ces droites ont le même *c. d. m. d.* que leurs autres extrémités, qui se confondent en O.

Étant donnés un polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ *et un point quelconque* O, *si l'on mène les droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ *égales et parallèles respectivement à* $A_2O, A_3O, \ldots, A_1O$, *le point* O *sera le c. d. m. d. du système des points* $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Car les droites $B_1O, B_2O, \ldots$ sont égales et parallèles aux côtés du polygone $A_1A_2 \ldots A_n$.

IV. *Étant donnés un système de n points* $A_1A_2 \dots A_n$ *et un autre système de* $n-1$ *points* $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$, *si l'on construit le polygone* $A_nC_1C_2 \dots C_{n-2}B_n$ *dont les côtés successifs* $A_nC_1, C_1C_2, \dots, C_{n-2}B_n$ *sont parallèles aux droites* $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{n-1}B_{n-1}$, *les systèmes* $A_1A_2 \dots A_n$, $B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$ *ont même c. d. m. d.*

V. *Étant donnés un triangle* $A_1A_2A_3$ *et un parallélogramme* MP_1P_2N, *si l'on prolonge le côté* P_1P_2 *d'une longueur* $P_2P_3 = P_1P_2$, *et que l'on construise les triangles* $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, $A_3A_1B_3$ *directement semblables aux triangles* MNP_1, MNP_2, MNP_3, *le sommet* A_1 *sera le centre de gravité du triangle* $B_1B_2B_3$.

Construisons sur les côtés de $A_1A_2A_3$ trois parallélogrammes directement semblables $A_2A_1B_1C_1$, $A_3A_2B'_2B_2$, $A_1A_3B'_3C_3$, et prolongeons $B'C_3$ de $C_3B_3 = B'C_3$; nous obtenons évidemment les points B_1, B_2, B_3 dont il est question dans l'énoncé. Or, les triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B'_2B'_3$ ont même centre de gravité G, et si l'on imprime à B'_2 le déplacement $B'_2B_2 = A_2A_3$, à B'_3 le déplacement $B'_3B_3 = 2A_3A_1$, le triangle $B_1B'_2B'_3$ est remplacé par le triangle $B_1B_2B_3$, et le centre de gravité G est transporté en A_1; car, si la parallèle menée par G à A_2A_3 coupe A_1A_3 en D, on a $GD = \frac{1}{3}A_2A_3$, $DA_1 = \frac{2}{3}A_3A_1 = \frac{1}{3}B'_3B_3$. Le théorème est donc démontré.

Scolie. 1° Dans la figure précédente, si D_1, E désignent les milieux de B_1C_1, A_1A_2, le point E est le centre de gravité du triangle $D_1B'_2C_3$. En effet, on passe du triangle $B_1B'_2B'_3$ au triangle $D_1B'_2C_3$ en imprimant aux sommets B_1, B'_3 les déplacements $B_1D_1 = \frac{1}{2}A_1A_2$, $B'_3C_3 = A_3A_1$.

2° Prolongeons $C_3B'_3$ de $B'_3F = C_3B'_3$; le centre de gravité du triangle $C_1B'_2F$ est symétrique de A_1 par rapport au centre de gravité de $A_1A_2A_3$. Le lecteur trouvera facilement la démonstration de cette propriété.

VI. *Étant donnés un polygone* $A_1A_2, \dots A_n$ *et un parallélogramme* MP_1P_2N, *si l'on porte sur le prolongement de* P_1P_2 *les longueurs* P_2P_3, P_3P_4, $\dots$ $P_{n-1}P_n$ *égales à* P_1P_2, *et que l'on construise les triangles* $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, $\dots$, $A_nA_1B_n$ *directement semblables aux triangles* MNP_1, MNP_2, $\dots$, MNP_n, A_1 *est le centre des moyennes distances des points* $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Construisons sur les côtés du polygone donné les parallélogrammes $A_2A_1B_1C_1$, $A_3A_2B'_2B_2, \dots, A_nA_1B'_nC_n$, directement semblables à MNP_1P_2, et prolongeons B'_3C_3 de $C_3B_3 = B'_3C_3$, B'_4C_4 de $C_4B_4 = 2B'_4C_4$, $\dots$, B'_nC_n de $C_nB_n = (n-2)B'_nC_n$: nous obtenons ainsi les points B_1, B_2, $\dots$ B_n

dont il est question dans l'énoncé. Supposons le théorème vérifié pour le polygone $A_1A_2A_4\ldots A_n$; alors, si l'on construit le parallélogramme A_1A_2CB directement semblable à $A_2A_4B_3C_2$, A_1 est le *c.d.m.d.* des points B, B_2, B_4, ..., B_n; d'après le théorème V, si l'on construit le parallélogramme $A_2A_1C'B'$ directement semblable à $A_1A_2C_1B_1$ et que l'on prolonge B'C' de $C'B''=B'C'$, A_1 est le *c.d.m.d.* des points B_1, B_2, B''. Par conséquent, les droites A_1B', $A_1B_3, A_1B_4, \ldots, A_1B_n$ sont égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé; de même, A_1B_1, A_1B_2, A_1B''. Mais il est facile de voir que les droites A_1B', A_1B'' sont égales, parallèles et de sens opposés. Par suite, les droites A_1B_1, A_1B_2, ..., A_1B_n étant égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé, A_1 est le *c.d.m.d.* des points B_1, B_2, ..., B_n.

Scolie. D'après le théorème de Laisant, le polygone $B_1B_2'\ldots B_n$ a même *c.d.m.d.* G que $A_1A_2\ldots A_n$. Mais pour passer au polygone $B_1B_2\ldots B_n$, on fait subir aux sommets B_2, B_3, ..., B_n des déplacements $B_2'B_2=A_2A_3$, $B_3'B_3=2A_2A_4$, ... Donc GA_1 est la résultante d'une ligne dont les côtés sont parallèles aux droites A_2A_3, A_3A_4, ..., A_nA_1 et ont pour longueurs $\frac{1}{n}A_2A_3$, $\frac{2}{n}A_3A_4$, ..., $\frac{n-1}{n}A_nA_1$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 497.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 280.)

Soient

$$A=\frac{a}{(b-c)(b-d)(c-d)},\quad B=\frac{b}{(a-c)(a-d)(c-d)},$$

$$C=\frac{c}{(a-b)(a-d)(b-d)},\quad C=\frac{d}{(a-b)(a-c)(b-c)};$$

on a

$$(A-B+C-D)\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}\right)=4^2.$$

(P.-A. Mac-Mahon.)

Cette identité est fausse. Ayant oublié la source d'où nous l'avons tirée, il nous est impossible d'en rectifier l'énoncé.

Pour constater l'inexactitude, il suffit de substituer les valeurs $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$. (H. Brocard, Laisant.)

Le premier membre de l'égalité proposée se ramène au quotient de

$$(a-b)^2[(a+b)(c+d)-a^2-b^2-ab-cd]$$
$$+(c-d)^2[(a+b)(c+d)-c^2-d^2-cd-ab]$$

par $abcd$; on voit immédiatement qu'il ne peut se réduire à 16, car le terme en a^4 du numérateur ne disparaît pas. (Mosnat.)

L'égalité proposée se vérifie, si l'on suppose

$$a+b+c+d=0, \quad a^2+b^2+c^2+d^2=0 \text{ (*)}. \quad \text{(Déprez.)}$$

On peut rapprocher de la question 497 l'égalité de M. Prior (Voir *Mathesis*, t. I, p. 42) : Si $a+b+c=0$,

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

---

*Question 726.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 152.)

Vérifier l'identité

$$3^n-\left(\frac{n}{1}\right)^2 3^{n-1}+\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 3^{n-2}-\cdots \mp 1$$
$$=4^n-\frac{n}{1}C_{n+1,n}4^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}C_{n+2,n}4^{n-2}-\cdots \mp C_{2n,n}.$$

(E. Catalan.)

Solution et généralisation par M. Laisant. L'identité proposée se vérifie en y remplaçant 3 et 4 par deux nombres quelconques $a-1$ et a, ayant pour différence l'unité.

Le premier membre (A) peut alors s'écrire

$$(a-1)^n-C^2_{n,1}(a-1)^{n-1}+C^2_{n,2}(a-1)^{n-2}-\cdots \mp C^2_{n,n}$$

et le second (B) :

$$a^n-C_{n,1}C_{n+1,n}a^{n-1}+C_{n,2}C_{n+2,n}a^{n-2}-\cdots \mp C_{2n,n}.$$

Or

$$(a-1)^n=a^n-C_{n,1}a^{n-1}+C_{n,2}a^{n-2}-\cdots \pm C_{n,n}$$
$$-C^2_{n,1}(a-1)^{n-1}=-C^2_{n,1}a^{n-1}+C^2_{n,1}C_{n-1,1}a^{n-2}-\cdots \pm C^2_{n,1}C_{n-1,n-1}$$
$$+C^2_{n,2}(a-1)^{n-2}=+C^2_{n,2}a^{n-2}-\cdots \pm C^2_{n,2}C_{n-2,n-2}$$
. . . . . .

(*) Ce sont probablement des relations de ce genre qui sont oubliées dans l'énoncé.

Si nous faisons la somme, nous obtenons pour le coefficient du terme en a^{n-p} :

$$\pm (C_{n,p} + C^2_{n,1} C_{n-1,p-1} + C^2_{n,2} C_{n-2,p-2} + \cdots + C^2_{n,p-1} C_{n-p+1,1} + C^2_{n,p}) = k.$$

Tout se réduit donc à établir l'identité entre l'expression k et $\pm C_{n,p} C_{n+p,p}$ coefficient du terme général en a^{n-p} du polynôme (B).

Or, on sait, et il est d'ailleurs très facile de démontrer cette propriété par les récurrences classiques des nombres $C_{n,p}$, qu'on a :

$$C_{n+p,p} = C_{n,p} + C_{p,1} C_{n,p-1} + C_{p,2} C_{n,p-2} + \cdots + C_{p,p-1} C_{n,1} + C_{p,p}.$$

Multipliant par $C_{n,p}$ nous avons pour terme général du produit

$$C_{n,p} C_{p,q} C_{n,p-q},$$

q étant inférieur à p, ou au plus égal à p.

Dans le développement k, nous avons le terme général de même rang, mais à partir de la droite

$$C^2_{n,p-q} C_{n-p+q,q}.$$

En divisant par $C_{n,p-q}$ l'identité des quotients $C_{n,p} C_{p,q}$ et $C_{n,p-q} C_{n-p+q,q}$ se vérifie immédiatement, car elle revient à

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!} \frac{p!}{q!\,(p-q)!} = \frac{n!}{(p-q)!\,(n-p+q)!} \frac{(n-p+q)!}{q!\,(n-p)!}.$$

Donc les termes des développements considérés sont identiques chacun à chacun, et par conséquent l'identité est établie dans les conditions plus générales que nous avons indiquées.

Cette question, en reprenant les nombres 3 et 4 de l'énoncé de M. Catalan, se prête à une autre remarque intéressante. Si nous écrivons

$$(x-1)^n = x^n - C_{n,1} x^{n-1} + C_{n,2} x^{n-2} - \cdots \pm C_{n,n},$$
$$(3+x)^n = 3^n + C_{n,1} 3^{n-1} x + C_{n,2} 3^{n-2} x^2 + \cdots + C_{n,n},$$

il devient évident qu'en effectuant le produit, le coefficient de x^n sera représenté par le premier membre (A) de l'identité de M. Catalan. Or, ce produit est

$$(x^2 + 2x - 3)^n = ((x+1)^2 - 4)^n.$$

Si nous prenons la seconde de ces deux formes, et si nous effectuons le développement, il est facile de voir que le coefficient de x^n est

$$C_{2n,n} - 4C_{n,1} C_{2n-2,n} + 4^2 C_{n,2} C_{2n-4,n} - 4^3 C_{n,3} C_{2n-6,n} + \cdots$$

le développement devant s'arrêter dès que $2(n-k)$ devient inférieur à n.

Nous avons donc, en résumé, la double identité :

$$3^n - C^2_{n,1}3^{n-1} + C^2_{n,2}3^{n-2} - C^2_{n,3}3^{n-3} + \cdots \pm C^2_{n,n}$$
$$= 4^n - C_{n,1}C_{n+1,n}4^{n-1} + C_{n,2}C_{n+2,n}4^{n-2} - C_{n,3}C_{n+3,n}4^{n-3} + \cdots \pm C_{2n,n}$$
$$= C_{2n,n} - 4C_{n,1}C_{2n-2,n} + 4^2C_{n,2}C_{2n-4,n} - 4^3C_{n,3}C_{2n-6,n} + \cdots$$

M. Joachimescu nous a aussi envoyé une bonne solution de la question 726, contenant une généralisation de la formule de M. Catalan.

Question 736.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 216.)

Intégrer l'équation

$$y' = \frac{xy - y^2}{1 - x^2}. \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

Solution par MM. Pierre Decamps (Gand), Péters (Liége) et M^lle^ Pompilianu (Bucharest). L'équation peut s'écrire

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = -\frac{y^2}{1-x^2}.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle rentre dans la catégorie des équations de J. Bernoulli : $y' + Py = Qy^m$, P et Q étant des fonctions de x. Pour l'intégrer, mettons y^2 en facteur, ce qui supprime la solution évidente $y = 0$; il vient

$$y^{-2}y' - \frac{x}{1-x^2}y^{-1} = -\frac{1}{1-x^2}$$

ou en posant

$$y^{-1} = t, \quad -y^{-2}y' = t', \quad t' + \frac{x}{1-x^2}t = \frac{1}{1-x^2},$$

équation linéaire avec second membre, qui a pour intégrale, si x^2 est inférieur à 1

$$t = C\sqrt{1-x^2} + x,$$

et si x^2 surpasse l'unité

$$t = G\sqrt{-1+x^2} + x.$$

On déduit de là, pour y, la valeur

$$y = \frac{1}{\sqrt{H(1-x^2)} + x},$$

H étant une nouvelle constante arbitraire.

MM. KEELHOFF et TEIXEIRA ont intégré l'équation donnée par variation des constantes arbitraires, en laissant d'abord de côté le terme en y^2 de l'équation donnée; M. DE STRÉKALOFF, en posant $y = 1 : uv$, et annulant le coefficient de u; M. BROCARD, en faisant $x = \sin t$.

×Question 738.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 215.)

Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle et x, y, z trois nombres, tels que leur somme $x+y+z$ soit positive. Démontrer que le produit xyz est négatif si

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=0. \quad \text{(W. J. GREENSTREET, M. A.)}$$

Solution par C. J. FRANÇOIS (la Haye). Comme on a

$$x+y+z>0,$$

il est impossible que ces trois nombres soient négatifs, et à cause de (1) ils ne peuvent être non plus tous positifs. Ainsi un ou deux de ces nombres doivent être négatifs. Supposons y et z négatifs, par exemple, respectivement égaux à $-y'$ et $-z'$. Puisque a, b, c sont les côtés d'un triangle, on a

$$a<b+c, \quad a^2<b^2+c^2+2bc,$$

mais on a aussi

$$x-y'-z'>0, \quad x>y'+z'.$$

Donc, à plus forte raison,

$$\frac{a^2}{x}<\frac{b^2+c^2+zbc}{y'+z'}.$$

Or,

$$\frac{a^2}{x}=\frac{b^2}{y'}+\frac{c^2}{z'};$$

donc on aurait

$$\frac{b^2}{y'}+\frac{c^2}{z'}<\frac{b^2+c^2+2bc}{y'+z'},$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduction faite $(bz'-cy')^2<0$, ce qui est absurde. Ainsi, un des trois nombres seulement sera négatif.

Si l'on considère (x, y, z) comme étant les coordonnées barycentriques d'un point par rapport au triangle ABC, la proposition s'exprime que tous les points de

la circonférence circonscrite au triangle se trouvent dans l'un des espaces infinis compris entre un côté du triangle de référence et les prolongements des côtés adjacents. (J.N.).

QUESTIONS D'EXAMEN.

506. On donne deux points A, B sur OX, un point C sur OY. Soient D, E deux points de OY symétriques par rapport à C. Les droites AD, BE se coupent en M, les droites AE, BD en N. Trouver le lieu géométrique des points M et N lorsque la distance CD varie. — Ce lieu est une hyperbole (H). Trouver le lieu de l'intersection des tangentes menées par A et B à cette courbe, lorsque le point C est supposé placé successivement en chaque point de OY. — Où faut-il placer le point C pour que l'hyperbole (H) soit équilatère? — Lorsque C se déplace sur OY, l'une des asymptotes de (H) reste fixe.

Équation de (H) :

$$y(ax + bx - 2ab) + 2c(x - a)(x - b) = 0.$$

Les tangentes en A et B se coupent sur OX. Une asymptote a pour équation $x = \frac{2ab}{a+b}$: elle est parallèle à OY et coupe OX au point F conjugué harmonique de O par rapport à AB, etc.

507. L'*écart normal* en un point d'une ellipse est l'angle compris entre la normale en ce point et le diamètre. Trouver l'écart normal maximum.

Les coefficients angulaires du diamètre et de la normale sont m, $\frac{a^2}{b^2}m$, etc. Les points cherchés sont les extrémités des diamètres conjugués égaux.

508. Résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} p^5 & q^5 & r^5 \\ (p+x)^5 & (q+x)^5 & (r+x)^5 \\ (2p+x)^5 & (2q+x)^5 & (2r+x)^5 \end{vmatrix} = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

743. 1° Étant donnée une conique et deux points A, B, dans son plan, les points de contact des tangentes à cette conique, menées par les deux points A, B, sont sur une deuxième conique S, passant aussi par

les deux points A, B. A quelle condition la conique S est-elle une hyperbole équilatère ?

2° Démontrer qu'après avoir choisi le point A, on peut trouver comme il suit un point B remplissant la condition indiquée ci-dessus. Du point A on trace deux droites quelconques et par le pôle de chacune d'elles on mène une perpendiculaire à l'autre. Ces deux droites se coupent au point cherché, B.

3° Le point A étant fixe, et les deux droites dont il vient d'être question tournant autour du point A, quel est le lieu du point B ?

(V. JAMET.)

744. Trouver 1° trois coefficients binomiaux consécutifs qui forment une progression arithmétique ; 2° quatre coefficients binomiaux consécutifs qui forment une proportion géométrique.

Démontrer qu'il ne peut exister trois coefficients binomiaux consécutifs qui soient en progression géométrique ou en progression harmonique, ni quatre coefficients consécutifs qui soient en progression arithmétique.

(SCHOUTE.)

745. Soient A, B deux points diamétralement opposés d'une circonférence, C un troisième point quelconque de cette ligne, BD et DE deux arcs égaux. Les droites AD et BC se coupent en F, les droites AE et CD en G. Démontrer que les droites FG, AE sont perpendiculaires. (A. C.)

746. Une conique est inscrite dans une parallélogramme ABCD. La tangente menée en un point M de la courbe rencontre les côtés BC, CD respectivement en R, Q ; la parallèle à BC par M coupe AB en L, et la parallèle à CD par M coupe AD en N. Démontrer que les triangles LMQ, NMR sont équivalents. (GENESE.)

Rectifications. Page 159, ligne 5 en remontant, lire BAJ (AJ est la tangente au cercle BAS), au lieu de BAS ; dernière ligne, lire *cercle* au lieu de triangle.

Page 206, Remarque III, lire $8 \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3$ au lieu de $2 \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3$.

Page 216, question 725, lire : le centre du cercle qui oscule V en son point de contact avec l'axe de V décrit une parabole semi-cubique.

Page 216, question 737, lire $\frac{4}{\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2}$, au lieu de $\frac{2}{\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2}$.

Page 217, ligne 13, lire Charlemagne au lieu de St-Louis.

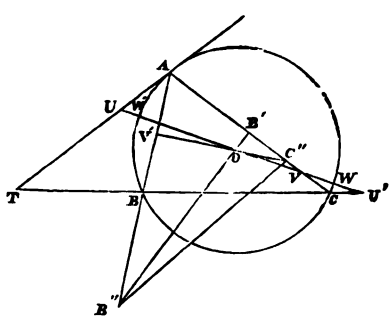
Page 221, ligne 10, lire $r_3 \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2}$, $r_c \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2}$ au lieu de $r_3 \operatorname{cosec}^2 \frac{B}{2}$, $r_c \operatorname{cosec}^2 \frac{C}{2}$.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

(Voir *Mathesis*, (2), I, pp. 90-92 et 116-117.)

9. Problème. Connaissant trois points A, B, C d'une conique et le centre O, trouver la tangente au sommet A.

D'après le théorème de Desargues, la tangente AT et le côté BC, les deux côtés AB et AC, et la courbe marquent sur une transversale quelconque u trois couples de points UU′, VV′, WW′ d'une même involution. Prenons pour u la droite menée par O et telle que ce point soit le milieu du segment compris dans l'angle BAC. Alors O est le milieu commun des couples VV′, WW′ de l'involution; par suite, c'est aussi le milieu du segment UU′. On a ainsi un procédé pour déterminer le point U de la tangente cherchée.



Soit T le point de rencontre de la tangente avec BC. Projetons les divisions harmoniques (V, V′, O, ∞), U, U′, O, ∞) respectivement à partir des points A et T; nous aurons deux faisceaux harmoniques. Donc la conjuguée harmonique de AO par rapport à l'angle BAC est parallèle à la conjuguée harmonique de TO par rapport à l'angle ATC.

En particulier, si O est le centre du cercle ABC, on peut écrire

$$\cot ATB = \tfrac{1}{2}(\cot ATO + \cot AUO), \text{ ou } \cot OAH = \tfrac{1}{2}\cot OAK + \tfrac{1}{2}\cot AUO,$$

H étant l'orthocentre et K, le point de Lemoine. (Sollertinsky.)

Soient A′, B′, C′ (non marqué sur la figure) les milieux de BC, CA, AB. Si par un même point on mène des parallèles à OB′ et CA, OC′ et AB, OA et à la tangente AT, on obtient un faisceau en involution. Or, si l'on coupe les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet par une transversale, on obtient trois couples de points en involution. Si la transversale est la droite de l'infini, les parallèles aux trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet donnent trois couples de rayons conjugués d'un faisceau involutif; réciproquement, on peut toujours

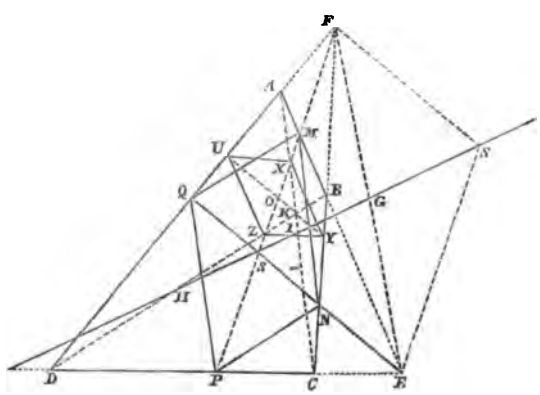
construire un quadrangle complet dont les six côtés soient parallèles aux rayons de trois couples d'un faisceau en involution.

D'après cela, si OB′ rencontre AB en B″ et que OC′ coupe AC en C″, la tangente AT est parallèle à la droite B″C″. (J. N.).

10. Soient ABCD un quadrilatère convexe; E, F les points de concours des côtés opposés AB et CD, AD et BC; H, I, G les milieux des trois diagonales BD, AC, EF. Soient S, S′ les points doubles de l'involution marquée sur la droite HIG par les trois couples de côtés opposés du quadrangle complet ABCD.

1° Le quadrilatère ESFS′ est un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD. 2° Les droites ES, FS rencontrent respectivement les couples de côtés opposés BC et AD, AB et CD en des points N et Q, M et P qui sont les sommets d'un parallélogramme MNPQ dont les côtés sont parallèles aux diagonales AC, BD du quadrilatère ABCD. (Sollertinsky.)

Les coniques passant par les quatre points A, B, C, D marquent sur une droite quelconque i des couples de points en involution; les points doubles de l'involution sont les points de contact de deux coniques circonscrites au quadrilatère ABCD et touchant i. Prenons pour i la droite de l'infini; alors les points doubles de l'involution sont situés à l'infini sur les axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD. Projetons l'involution à partir des points F, E et soient FS et FS′, ES et ES′ les rayons aboutissant aux points doubles, ou parallèles aux axes des deux paraboles. Les droites FS, FS′ divisent harmoniquement l'angle CFD; donc FS et les côtés de l'angle CFD déterminent sur la transversale ES parallèle à FS′ des segments égaux NS = SQ. De même MS = SP; donc la figure MNPQ est un parallélogramme.



D'après un cas particulier du théorème de Brianchon (CREMONA, *Géométrie projective*, § 67), les ternes de rayons (F, AMB), (E, CNB) se coupent en six points situés sur trois droites concourantes AC, PQ, MN; donc MN et PQ sont parallèles à AC; pour la même raison, MQ et PN sont parallèles à DB. Mais le centre S de tout parallélogramme MNPQ inscrit à un quadrilatère ABCD et dont les côtés sont parallèles aux diagonales de ce quadrilatère est situé sur la droite joignant les milieux des diagonales. Donc la droite SS' coïncide avec HI.

La droite SS' est divisée harmoniquement par les côtés des angles BEC, BFA; donc S et S' sont les points doubles de l'involution marquée sur la droite HI par les couples de côtés opposés du quadrangle ABCD; G est le point central de l'involution. Les points S, S' sont donc les points de contact de deux coniques circonscrites au quadrangle et touchant la droite HI. Pour les construire, il suffit d'observer que les distances GS, GS' sont égales à la tangente menée de G à la circonférence qui a pour diamètre HI.

Les droites FS', ES' rencontrent aussi les droites AB et CD, AD et BC aux sommets d'un parallélogramme.

On peut se proposer de construire un parallélogramme XYZO inscrit au quadrilatère simple ACBD et dont les diagonales passent par les points de concours F, F' des côtés opposés AD et BC, AC et BD: ces diagonales sont parallèles à celles du parallélogramme MNPQ, et les côtés sont parallèles à AB et CD.

Lorsque le quadrilatère ABCD est inscriptible, les bissectrices des angles AFB, BFC marquent sur AB et CD, BC et DA les sommets d'un losange. Ce cas particulier s'établit facilement par la géométrie élémentaire et donne, au moyen d'une projection orthogonale, le cas général.

(J. N.)

11. On donne un triangle ABC et un point P dans son plan. Trouver le lieu des centres des coniques S inscrites dans le triangle ABC et vues du point P sous un angle droit.

Démontrer que les coniques S sont vues sous un angle droit d'un autre point P'; montrer que, si P se déplace, la droite PP' passe par un point fixe I et que le produit IP. IP' est constant (*Concours d'Agrégation des sciences math.*, 1890).

Construisons les angles droits APA', BPB', CPC'; soient A', B', C' les points où leurs seconds côtés rencontrent respectivement BC, CA,

AB ; ces points sont en ligne droite. Toutes les coniques S sont inscrites dans le quadrilatère formé par AB, BC, CA, A'B' ; car les couples de tangentes menées de P aux coniques dans ce quadrilatère forment une involution, dont font partie les couples de droites rectangulaires PA et PA', PB et PB', PC et PC'. Donc deux rayons conjugués quelconques sont rectangulaires. Le lieu des centres des courbes S est donc la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère (Théorème de Newton).

Les trois circonférences décrites sur AA', BB', CC' comme diamètres passent par les pieds H_1, H_2, H_3 des hauteurs du triangle ABC ; l'orthocentre H de ce triangle est évidemment d'égale puissance par rapport aux trois cercles. Donc ceux-ci ont un même axe radical PH, coupant ces cercles en un second point P' et l'on a $HP \cdot HP' = HA \cdot HH_1$. (J. N.)

NOTE SUR LE RAYON DE COURBURE ;

par M. C. Wasteels, professeur agrégé.

1. Théorème I. Si l'on mène la tangente en un point M d'une courbe et que, d'un point M' de celle-ci voisin du premier, on abaisse sur la tangente la perpendiculaire $M'T = \delta$, on aura, en désignant par t la distance MT et par ρ le rayon de courbure en M :

$$2\rho = \lim \frac{t^2}{\delta}.$$

Ce théorème, bien connu, se démontre sans peine en observant que le cercle de courbure en un point d'une courbe est la limite des cercles tangents à la courbe en ce point et passant par un second point de la courbe, qui se rapproche indéfiniment du premier.

2. On en déduit facilement que si la droite M'T rencontre MT sous un angle ω, on a

$$2\rho = \frac{1}{\sin \omega} \lim \frac{t^2}{\delta}.$$

3. *Application aux coniques.* 1° *Conique à centre.* En rapportant la courbe à deux diamètres conjugués, son équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

La droite OM étant prise pour axe des x, on aura, en prenant pour l'angle ω celui des diamètres conjugués :

$$2\rho_M = \frac{1}{\sin\omega}\lim\frac{y^2}{\pm(a'-x)} = \frac{b'^2}{a'^2\sin\omega}\lim\frac{a'^2-x'^2}{a'-x},$$

pour x tendant vers a' ; d'où

$$\rho_M = \frac{b'^2}{a'\sin\omega} = \frac{b'^2}{d},$$

d étant la distance du point M au diamètre parallèle à la tangente en ce point (Théorème de Ch. Dupin).

2° *Parabole.* La courbe étant rapportée au diamètre passant par M et à la tangente en ce point a une équation de la forme :

$$y^2 = 2p'x.$$

Si ω est l'angle des axes de coordonnées, on a :

$$2\rho_M = \frac{1}{\sin\omega}\lim\frac{y^2}{x} = \frac{2p'}{\sin\omega}; \quad \text{d'où} \quad \rho_M = \frac{p'}{\sin\omega}.$$

Or, on sait que p' exprime le double de la distance du point M à la directrice ; on conclut aisément de là que le rayon de courbure est double de la portion de la normale comprise entre la courbe et la directrice.

4. On démontre encore sans peine, au moyen de la formule du n° 2, que les rayons de courbure en deux points d'une conique sont proportionnels aux cubes des tangentes menées en ces points, ces tangentes étant comptées depuis leur point d'intersection jusqu'à la courbe (*).

5. Théorème II. Si, dans une conique, on mène la corde $MN = n$, faisant avec la tangente en M l'angle ω, et qu'on désigne par k le rapport constant des produits des segments déterminés par la conique sur

---

(*) La propriété en question peut encore être considérée comme un cas particulier du théorème suivant : Si l'on considère deux points correspondants M et M' de deux figures homologiques, et qu'on mène en ces points les tangentes, se coupant en S sur l'axe d'homologie, on a :

$$\frac{\rho_M}{\rho_{M'}} = \pm\lambda\left(\frac{MS}{M'S}\right)^3,$$

λ étant le coefficient d'homologie.

des parallèles à la tangente et à la corde en M menées par un point quelconque (les segments étant comptés à partir de ce point), on a :

$$2\rho_M = \frac{n}{\sin\omega} k.$$

En effet, menons la droite M'T (définie comme au n° 2), parallèlement à MN, et soit N' le second point de rencontre de la droite TM' avec la conique; on aura

$$2\rho = \frac{1}{\sin\omega} \lim \frac{\overline{MT}^2}{M'T} = \frac{1}{\sin\omega} \lim \frac{\overline{MT}^2}{TM'.TN'} \cdot \lim TN' = \frac{k.n}{\sin\omega};$$

car la quantité $\frac{\overline{MT}^2}{TM'.TN'}$ est constante et est égale à k.

6. *Cas particulier*. Si MN est la normale, on a

$$2\rho = k.n.$$

Conséquences. 1° Si M_1 est un point de la conique où la tangente est perpendiculaire à la tangente en M, et qu'on désigne par S le point de rencontre de ces deux droites, on a

$$2\rho = n\left(\frac{MS}{M_1S}\right)^2.$$

2° Si la courbe a un centre et qu'on désigne par a' et b' les demi-diamètres parallèles à la tangente et à la normale en M, on peut écrire

$$2\rho = n\left(\frac{a'}{b'}\right)^2.$$

3° S'il s'agit d'une hyperbole et qu'on désigne par α et α' les angles que les asymptotes font avec la normale en M, on a

$$k = \pm \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha';$$

par suite

$$2\rho = \pm n \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha'.$$

7. *Application*. Dans l'hyperbole équilatère, les asymptotes sont à angle droit, et par suite

$$\pm \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = 1; \quad \text{d'où} \quad 2\rho = n.$$

La formule

$$2\rho = n\left(\frac{a'}{b'}\right)^2$$

conduit au même résultat; en effet, $2b'$ est le symétrique, par rapport à l'axe transverse, du diamètre conjugué de $2a'$; par suite $a' = b'$.

Ainsi, ***dans l'hyperbole équilatère, le rayon de courbure est la moitié du segment de la normale compris entre ses deux points d'intersection avec la courbe.***

Cette nouvelle analogie de l'hyperbole équilatère avec le cercle est à remarquer (*).

BIBLIOGRAPHIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Nomographie. *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques.* Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application, par M. D'OCAGNE, ingénieur des ponts et chaussées. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891. Un volume gr. in-8° de 96 pages avec 38 figures dans le texte et huit planches. Prix : fr. 3,50.

Tout le monde sait comment on peut remplacer une table à simple entrée, telle que des logarithmes ou des carrés des nombres par la représentation graphique de la courbe ayant pour équation $y = \text{Log}\, x$, ou $y = x^2$. Mais on connaît moins les procédés imaginés pour remplacer, par des tableaux graphiques ou *abaques*, les tables à double entrée, telles que les tables de multiplication ou de fonctions elliptiques.

Les principes généraux relatifs à la représentation graphique des relations entre trois variables semblent dus à Terquem, à Lalanne, Massau, Lallemand et à M. d'Ocagne lui même. Ce dernier a fait, dans le livre que nous annonçons ici, un exposé systématique de la théorie des abaques, à la fois clair et substantiel, où les divers procédés employés avant lui sont rapprochés et fondus en un corps de doctrine auquel il a donné le nom de *Nomographie*. La théorie est éclaircie au moyen d'exemples empruntés à la pratique courante, notamment à celle de l'ingénieur.

Nous avons donné une analyse étendue de la *Nomographie* dans la livraison d'octobre 1891, de la *Revue des questions scientifiques*. La place nous manque pour la reproduire ici et nous y renvoyons le lecteur. Contentons-nous de quelques indications sommaires sur le principe le plus général de la représentation géométrique de relations de la forme $c = \text{F}(a, b)$, soit en coordonnées cartésiennes (Massau), soit en coordonnées tangentielles (d'Ocagne).

Si l'on pose $a = f(x, y)$, $b = \varphi(x, y)$, on trouvera $c = \psi(x, y)$. Donnons à a, b, c, les valeurs successives 1, 2, 3, etc. et dessinons les trois séries de courbes

$$\begin{array}{lll} f(x,y)=1, & f(x,y)=2, & f(x,y)=3, \text{ etc}; \\ \varphi(x,y)=1, & \varphi(x,y)=2, & \varphi(x,y)=3, \text{ etc}; \\ \psi(x,y)=1, & \psi(x,y)=2, & \psi(x,y)=3, \text{ etc}, \end{array}$$

(*) Comparer, au sujet des n^{os} 4 et 7, *Mathesis*, (1), II, 25-29, VI, 12-13.

dont chacune est dite une courbe *isoplèthe* (c'est-à-dire une courbe où le paramètre, a, b, ou c a une seule et même valeur). L'abaque est le tableau graphique de ces trois séries d'isoplèthes. Le point d'intersection de deux des premières isoplèthes,

$$f(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = 3,$$

par exemple, tombera, ou bien sur une troisième isoplèthe, par exemple, sur

$$\psi(x, y) = 1,$$

ou entre deux de celles-ci, soit, pour fixer les idées, entre

$$\psi(x, y) = 7 \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 8.$$

D'après la théorie de l'élimination, dans le premier cas, $c = F(2, 3)$ est égal à 1 ; dans l'autre $c = F(2, 3)$ est compris entre 7 et 8, et en se laissant guider par le sentiment de la continuité, on pourra estimer à vue la valeur approximative (7 + une fraction) qui est égale à F (2, 3).

Si l'on suppose que x, y sont des coordonnées parallèles d'une droite, c'est-à-dire les distances (prises avec les signes + ou —) à deux origines fixes de ses points d'intersection avec deux axes parallèles, tout ce qui précède peut s'interpréter d'après le principe de dualité, comme on l'imagine aisément.

M. d'Ocagne expose le principe des abaques cartésiens, avec des exemples, des modifications et des simplifications, dans ses chapitres I, II, III ; celui des abaques tangentiels, dans le chapitre IV ; les deux chapitres suivants contiennent des notions sur des procédés de représentation des relations contenant plus de trois variables.

Le livre de M. d'Ocagne est surtout destiné aux ingénieurs ; « mais nous le recommandons aussi aux professeurs de mathématiques qui ne peuvent oublier que pendant deux mille ans, d'Euclide à Sluse, on a résolu, graphiquement surtout, les équations du deuxième, du troisième, et du quatrième degré. »

P. M.

Estudios críticos sobre la generación de los conceptos matemáticos, par D. Zoel García de Galdeano, cathedrático de la Universidad de Zaragoza. Madrid, Fontanet, 1890 (39 + 99 p. in-12). Prix : 1 fr. + 2 fr. 50.

La première de ces études est un résumé historique de l'évolution des concepts mathématiques, la seconde traite du développement de la géométrie euclidienne jusque dans les temps modernes. L'une et l'autre semblent écrites avec une compétence parfaite et renferment de précieuses indications historiques et critiques(*). Voici quelques-uns des noms cités dans le premier de ces opuscules : Descartes, Roberval, Fermat, Pascal ; Newton, Leibniz ; Euler, d'Alembert, Lagrange ; Cauchy,

---

(*) Dans la première, nous devons signaler une petite erreur : Lagrange est donné comme étant un mathématicien français. En réalité, il était italien et avant son départ de Turin pour Berlin, il avait déjà fait la plupart de ses grandes découvertes en analyse et en mécanique analytique Nous croyons aussi que les célèbres *Réflexions* de Poinsot, qui, au fond, ne contiennent aucun résultat nouveau, ont été sans influence sur le développement de l'arithmétique supérieure.

Legendre, Abel, Jacobi; Puiseux, Liouville, Hermite, Briot et Bouquet, Riemann; Gauss, Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind; Cramer, Waring, Vandermonde. Bézout, Binet; Galois, Bertrand, Serret, Jordan; Boole, Cayley, Sylvester, Aronhold, Clebsch, Brioschi; Euclide, Archimède, Apollonius, Desargues, Grégoire de S. Vincent, La Hire, Monge, Poncelet, Moebius, Chasles, von Staudt; Hamilton, Grassmann; Lobatschewsky, Bolyai, Beltrami, Helmholtz; Weierstrass, Lipschitz, etc., etc.

Tratado de Algebra, par D. Z G. DE GALDEANO. Parte primera. Tratado elemental Madrid, Juste, 1883 (335 p. in-8°). Prix : 10 francs.

Ce volume contient les notions et les principes fondamentaux du calcul algébrique, la théorie des combinaisons, les principes de la théorie des déterminants, quelques notions sur la théorie des séries et des fractions continues, la théorie des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires, la théorie générale des opérations d'après Hankel et son application à la théorie des quaternions, la résolution des équations du premier et du second degré, celle des équations binômes, des congruences du premier degré et des congruences binômes, la théorie des inégalités.

Dans cet ouvrage, comme dans ses autres manuels, le savant professeur de Saragosse expose les matières dont il traite avec beaucoup de clarté et en tenant compte des recherches les plus récentes (D'après G. TEIXEIRA, *J. de sciencias mathematicas e astronomicas*, 1891, t. X, p. 48).

Geometria elemental, conforme con el desarollo actual de las theorias modernas, par D. Z. G DE GALDEANO. Segunda edición, considerablemente corregida y aumentata. Toledo, Menor Hermanos, 1888 (2 v. in-8° de 128 et 378 p. avec fig. dans le texte). Prix : 10 francs.

L'ouvrage consacré par M. de Galdeano à la Géométrie élémentaire contient non-seulement les matières traitées habituellement dans les manuels analogues, mais encore beaucoup de questions d'une nature plus relevée. Ces matières sont arrangées dans un ordre original et étudiées d'une manière approfondie en deux vol umes contenant l'un la théorie de l'égalité géométrique, l'autre celle de la proportionnalité.

Dans le premier volume, on trouve les définitions et les principes généraux, la théorie des figures rectilignes dans le plan et dans l'espace, celle des figures circulaires planes et enfin les propriétés des corps ronds.

Le second volume contient d'abord une théorie générale de la proportionnalité et son application à la mesure des grandeurs (arcs, angles, aires, volumes, etc.). Suit l'étude de la proportionnalité entre les éléments des figures planes, puis des figures dans l'espace.

Dans tout l'ouvrage, l'auteur ne sépare pas la géométrie plane de la géométrie solide, mais fait suivre chaque section de la première, de la section correspondante de la seconde, de manière à rapprocher les théorèmes analogues Notons encore que dans chaque chapitre du livre, les propriétés métriques des figures sont nettement séparées de leurs propriétés de position.

Pour donner une idée du point de vue moderne dans lequel est conçu le livre de M. de Galdeano, il suffit d'observer que l'on y fait la distinction du système euclidien et des systèmes non euclidiens, et qu'on y trouve les théories de l'homographie, de l'homologie, de l'involution, des polaires réciproques, et d'autres importantes aussi dans la science de notre époque. (D'après G. TEIXEIRA, *J. de Sc. math. e astr.*, 1891, t. X, p. 49).

G. LAZZERI et A. BASSANI, professori nella R. Accademia Navale. *Elementi di Geometria. Libro di testo par la R. Accademia Navale*. Livorno, R. Giusti, 1891 (un vol. in 8° de XIX-455 p. avec figures dans le texte). Prix : 6 francs.

Dans les Éléments de MM. Lazzeri et Bassani les diverses théories géométriques sont traitées avec ordre, rigueur et clarté. En rapprochant dans leur livre les parties correspondantes de la planimétrie et de la stéréométrie, les auteurs du nouveau manuel ont amélioré ou simplifié les démonstrations et en ont mieux fait saisir les idées fondamentales. L'ouvrage est divisé en cinq livres, suivis respectivement de 71, 237, 311, 235, 227 (en tout 1081) exercices.

Le premier livre contient cinq chapitres, dont le premier traite des définitions et des postulats relatifs à la droite et au plan; le second, des définitions et des postulats relatifs aux segments, aux angles, aux dièdres, à l'addition et à la soustraction de ces grandeurs; le troisième, des premières notions sur le cercle et la sphère; le quatrième, des droites et des plans parallèles; le cinquième, des droites et des plans perpendiculaires et des figures symétriques.

Le second livre est divisé en quatre chapitres. 1 Polygones. 2. Angles polyèdres 3. Polyèdres. 4. Distances.

Le troisième livre contient six chapitres. 1. Relation d'une droite, d'un angle ou d'un cercle avec un cercle; d'un plan ou d'une sphère avec une sphère. 2. Circonférence (ou sphère) passant par des points ou tangente à des droites (ou plans). Polygones et polyèdres réguliers. 3. Systèmes de cercles et de sphères. 4. Homothétie directe, affine, inverse. 5. Géométrie de la sphère. 6. Cône et cylindre.

Le quatrième livre traite d'abord de l'équivalence en général; de celle des polygones et des surfaces polyédriques; des polygones sphériques et des pyramides sphériques: des prismes. Les chapitres suivants sont consacrés à la théorie des limites, à celle de l'équivalence des polyèdres, du cercle, du cylindre, du cône, de la sphère et du tore (surface et volume).

Le dernier livre est divisé en quatre chapitres. 1. Théorie des proportions. 2. Figures semblables. 3 Mesure des figures. 4. Quelques applications de l'algèbre à la géométrie plane et solide.

Quelques définitions et considérations relatives aux postulats peuvent donner lieu à des critiques.

L'exécution typographique du livre est soignée et les figures sont très nettes. (D'après F. GIUDICE, dans la *Revista di Matematica* de Peano, 1891, t. I, pp 160-162.)

Leçons d'Algèbre à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques Spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement par A. AMIGUES, ancien élève de l'École normale supérieure, Professeur de Mathématiques Spéciales et chargé d'un cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Marseille. Paris, F. Alcan, 1890. (in-8° de VIII-698 p.). — Prix : 10 fr.

Ouvrage analogue aux manuels de MM. de Longchamps et Niewenglowski, écrits dans le même esprit de rigueur et enrichi aussi d'exercices à la fin de chaque chapitre. Voici un extrait de la table des matières.

I. *Compléments d'algèbre élémentaire.* 1. Inégalité et identités. 2-4. Puissances, division, racines des polynômes. 5. Des équations en général. 7. Equations linéaires. 6-8 Déterminants.

II. *Éléments d'analyse infinitésimale.* 1. Limites et nombres incommensurables. 2. Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux. 3. Des fonctions en général et de l'exponentielle. 4. Séries. 5. Le nombre *e*. 6. Logarithmes. 7. Infiniment petits. 8-12. Recherche des dérivées. 13. Série de Taylor. 14. Vraies valeurs. 15. Variation d'une fonction. 16. Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables; conséquences. 17-18. Formes algébriques; formes quadratiques. 19. Intégrale définie. 20. Intégrales indéfinies. 21. Calcul des intégrales définies et applications à la recherche des aires.

III. *Théorie des équations.* 1. Calcul des imaginaires. 2. Plus grand commun diviseur. Éliminant d'Euler. 3-5 Toute équation a une racine (dém. de Walecki); conséquences immédiates. 6. Fonctions symétriques. 7. Élimination (par les fonctions symétriques; méthode de Bézout). 8. Racines égales. 9-10. Abaissement et transformation des équations. 11-14. Théorèmes de Descartes, de Rolle et de Sturm. 15. Limites des racines. 16. Racines commensurables. 17. Séparation des racines. 18. Des différences. 19. Méthodes d'approximation. 20. Fractions continues. 21-22. Résolution des équations par radicaux (3e et 4e degré). 23. Fractions rationnelles. 24. Questions diverses.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 317 et 318.

(Voir *Mathesis*, (1), IV, p. 71.)

317. *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle fixe* ABC *à un point quelconque* O *rencontrent les côtés opposés en trois points* A′, B′, C′. *Par ceux-ci et par deux points fixes* D, E *on fait passer une conique qui rencontre les côtés de* ABC *en trois nouveaux points* A″, B″, C″; *les droites* AA″, BB″, CC″ *se coupent en un même point* O′. *Les points* O, O′ *satisfont à une transformation birationnelle réversible, qu'on demande de décomposer en trois transformations quadratiques.* (J. NEUBERG.)

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

×**318.** *La conique* A'B'C' DE *étant remplacée par le cercle* A'B'C' *et le point* O *parcourant la circonférence* ABC, *trouver le lieu décrit par* O'.

(J. GILLET.)

Solution analytique. Nous reproduisons ici la solution que nous avons publiée dans les *Wiskundige Opgaven.*

Soient $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\lambda, \mu, \nu), (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ les coordonnées des points O, O', D, E par rapport au triangle de référence ABC. Représentons la conique A'B'C'.A''B''C'' par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Si l'on fait $z = 0$, on trouve l'équation des droites CC', CC'' sous la forme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 = 0;$$

en l'identifiant avec l'équation

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha_1} - \frac{y}{\beta_1}\right) = 0,$$

on obtient

$$A : A' : 2B'' = \frac{1}{\alpha\alpha_1} : \frac{1}{\beta\beta_1} : -\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right).$$

En continuant ainsi, on voit que l'équation de la courbe est

$$\mathbf{S}\frac{x^2}{\alpha\alpha_1} - \mathbf{S}xy\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right) = 0, \qquad (A)$$

avec les conditions

$$\mathbf{S}\frac{\lambda^2}{\alpha\alpha_1} - \mathbf{S}\lambda\mu\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right) = 0, \qquad (1)$$

$$\mathbf{S}\frac{\lambda_1^2}{\alpha\alpha_1} - \mathbf{S}\lambda_1\mu_1\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right) = 0. \qquad (2)$$

Soient ω, ω' les points qui ont pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right), \left(\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}\right);$$

on les déduit des points O, O' par une transformation quadratique, par exemple par inversion triangulaire si l'on adopte des coordonnées normales. Les égalités (1) et (2) expriment que ω' est à l'intersection des polaires de ω par rapport à deux coniques ayant pour équation

$$\mathbf{S}\lambda^2x^2 - 2\mathbf{S}\lambda\mu xy = 0, \quad \mathbf{S}\lambda_1^2x^2 - 2\mathbf{S}\lambda_1\mu_1xy = 0; \qquad (3)$$

ces courbes touchent les côtés du triangle ABC en des points qui se déduisent facilement des points D, E.

Si nous rapportons les coniques (3) à leur triangle autopolaire commun, elles ont pour équations

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0, \quad L'x^2 + M'y^2 + N'z^2 = 0,$$

et les conditions (1) et (2) sont de la forme

$$L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 = 0, \quad L'\alpha\alpha_1 + M'\beta\beta_1 + N'\gamma\gamma_1 = 0. \qquad (4)$$

On déduit de (4)

$$\frac{\alpha\alpha_1}{MN' - M'N} = \frac{\beta\beta_1}{NL' - N'L} = \frac{\gamma\gamma_1}{LM' - L'M},$$

formules qui définissent une transformation quadratique.

Voici une autre démonstration. Soient

$$Fyz + Gzx + Hxy = 0, \quad fx + gy + hz = 0,$$

les équations de la conique ABCDE et de la droite DE. L'équation (A) doit être identique avec la suivante :

$$Fyz + Gzx + Hxy + (fx + gy + hz)(f'x + g'y + h'z) = 0;$$

d'où les égalités

$$ff' = \frac{\rho}{\alpha\alpha_1}, \quad gg' = \frac{\rho}{\beta\beta_1}, \quad hh' = \frac{\rho}{\gamma\gamma_1},$$

$$F + gh' + g'h = -\rho\left(\frac{1}{\beta\gamma_1} + \frac{1}{\beta_1\gamma}\right), \ldots,$$

ρ étant un facteur de proportionalité. Si l'on élimine entre ces égalités les quantités auxiliaires f', g', h', on obtient

$$\frac{H}{fg} = -\rho\left(\frac{1}{g\beta} + \frac{1}{f\alpha}\right)\left(\frac{1}{g\beta_1} + \frac{1}{f\alpha_1}\right), \ldots \qquad (5)$$

Ces formules montrent que les points ω, ω' satisfont à une transformation quadratique dont le triangle principal a pour côtés les droites ayant respectivement pour équation

$$\frac{x}{f} + \frac{y}{g} = 0, \quad \frac{y}{g} + \frac{z}{h} = 0, \quad \frac{z}{h} + \frac{x}{f} = 0.$$

Si le point O décrit une conique circonscrite au triangle ABC, les coordonnées de O vérifient une équation de la forme

$$\frac{L}{\alpha} + \frac{M}{\beta} + \frac{N}{\gamma} = 0, \qquad (6)$$

En éliminant α, β, γ entre les équations (5) et (6), on trouve pour le lieu du point O' :

$$\begin{vmatrix} 0 & L & M & N \\ \dfrac{F}{\alpha_1(g\beta_1 + h\gamma_1)} & 0 & \dfrac{1}{g} & \dfrac{1}{h} \\ \dfrac{G}{\beta_1(h\gamma_1 + f\alpha_1)} & \dfrac{1}{f} & 0 & \dfrac{1}{h} \\ \dfrac{H}{\gamma_1(f\alpha_1 + g\beta_1)} & \dfrac{1}{f} & \dfrac{1}{g} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce lieu est donc une courbe du quatrième ordre.

NOTE. Des solutions analogues nous ont été adressées par MM. LEMOINE, GOB et DÉPREZ.

Une solution fort instructive, purement synthétique, a été publiée par M. SCHOUTE dans les *Wiskundige opgaven* (*tweede deel*, question 148). Nous regrettons que son étendue ne nous permette pas de la reproduire en entier. L'auteur substitue aux points D, E les points cycliques, de sorte que les coniques ABC A'B'C' deviennent des cercles. Alors la transformation est du huitième degré ; elle a pour points fondamentaux quadruples les sommets du triangle ABC, et pour points fondamentaux doubles les sommets du triangle $A_1B_1C_1$ ayant pour côtés les parallèles menées par A, B, C aux droites BC, CA, AB. (J. N.)

Question 723.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 128.)

Soient CA, CB ***deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, et*** F ***l'un des foyers ; on construit le parallélogramme*** FAVB. ***Démontrer*** 1° ***que la droite*** CV ***est dirigée suivant la bissectrice de l'angle*** AVB ; 2° ***que*** $CV^2 = 2VA.VB$; 3° ***que le lieu du point*** V ***est une ellipse quand on fait varier le système des diamètres conjugués. — Étendre ces propriétés à l'hyperbole.*** (LAISANT.)

Solution par M. GENESE (Aberystwyth). On a l'identité

$$(C + \alpha + \beta)^2 = C^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2C(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta.$$

Si l'on y fait $\alpha^2 + \beta^2 = C^2$, on obtient

$$(C + \alpha + \beta)^2 = 2(C + \alpha)(C + \beta).$$

Soient, maintenant, C. α, β les *lignes dirigées* FC, CA, CB.

Alors on a les équipollences

$$C + \alpha = FA, C + \beta = FB, C + \alpha + \beta =$$
$$(C + \alpha) + (C + \beta) - C = FA + FB - FC = FV - FC = CV.$$

Donc

$$CV^2 = 2FA.FB = 2BV.AV,$$

ce qui démontre deux parties de la question. On voit, en passant, que l'analyse démontre également que $FT^2 = 2FA.FB$, T étant le pôle de AB.

Les diagonales FV, AB ont même milieu, et l'on sait que le milieu de AB décrit une ellipse. Donc le point F décrit une courbe homothétique, c'est-à-dire une ellipse.

Dans une hyperbole,

$$\alpha^2 - \beta^2 = C^2;$$

donc

$$(C + \alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)(\alpha + C).$$

Les tangentes en A, B (bien-entendu, la seconde, à l'hyperbole conjuguée) vont se rencontrer en L sur une asymptote, et l'on a l'équipollence

$$FL^2 = 2CL.FA.$$

De là, on conclut que, si $LL' = 2CL$, les triangles FLL', AFL sont semblables.

Solution d'après MM. Déprez et Decamps. Construisons le parallélogramme ACBM. Les deux triangles CAV, MBF ayant les côtés VA et BF, AC et MB égaux et parallèles sont égaux; donc l'angle AVC $=$ BFM $= \frac{1}{2}$ BFA $= \frac{1}{2}$ AVB, et par suite, VC est la bissectrice de l'angle AVB.

Les droites VC, MF étant égales et parallèles, les lignes VM, CV sont égales et parallèles. Or, d'après un théorème connu, le point M décrit une ellipse semblable à l'ellipse proposée; donc V décrit une ellipse, égale à celle que décrit M.

Les coordonnées des points A et B sont $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$, et celles du point M sont $[a(\cos\varphi - \sin\varphi), b(\sin\varphi + \cos\varphi)]$.

On en conclut

$$\overline{VC}^2 = \overline{MF}^2 = [c - a(\cos\varphi - \sin\varphi)]^2 + b^2(\sin\varphi + \cos\varphi)^2$$
$$= 2(a - c\cos\varphi)(a + c\sin\varphi) = 2FA.FB = 2VB.VA.$$

Soient maintenant CA, CB deux diamètres d'une hyperbole, le premier rencontrant la courbe. Construisons les parallélogrammes FAVB, CAMB; on sait que le point M appartient à une asymptote. Les droites AF, AC étant respectivement parallèles à BV, MB, MV est égale et parallèle à FC; donc V décrit une ligne parallèle à l'asymptote CM et passant par le second foyer F'.

La droite FM est la bissectrice de l'angle formé par les rayons joignant F aux points de contact des tangentes issues de M; donc elle fait des angles égaux avec FA et une parallèle à CM par F.

Il suit de là que sa parallèle CV est la bissectrice de l'angle F'VB.

Les coordonnées de A sont de la forme a séc φ, b tg φ; on en conclut que celles de B sont a tg φ, b séc φ; par suite, celles de M sont a (séc φ + tg φ), b (séc φ + tg φ). On en conclut

$$CV^2 = \overline{FM}^2 = [a\ (\text{séc}\ \varphi + \text{tg}\ \varphi) - c]^2 + b^2\ [\text{séc}\ \varphi + \text{tg}\ \varphi]^2$$
$$= 2c\ (\text{séc}\ \varphi + \text{tg}\ \varphi)\ (c\ \text{séc}\ \varphi - a) = 2AV.\ F'V.$$

M Déprez étend aussi le théorème de M. Laisant à l'ellipse sphérique.

QUESTIONS D'EXAMEN.

509. On appelle ***déviation*** en un point d'une ellipse l'angle compris entre la tangente en ce point et la tangente au point correspondant du cercle principal. Trouver la déviation maxima.

Les coefficients angulaires des deux tangentes sont m et $\frac{b}{a}m$; d'où la tangente de la déviation

$$= \frac{m\left(1 - \frac{b}{a}\right)}{1 + \frac{b}{a}m^2} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{\frac{1}{m} + \frac{b}{a}m}.$$

Le maximum correspond à $\frac{1}{m} = \frac{b}{a}m$.

510. Si $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$ est une solution de l'équation

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n = 0,$$

on a

$$p_1 \sin\alpha + p_2 \sin 2\alpha + \cdots + p_n \sin n\alpha = 0.$$

(W. J. Greenstreet.)

511. Quelle est la courbe représentée par l'équation

$$\arccos x + \arccos y = \alpha ?$$

512. Trouver un nombre entier N, sachant que la somme des N premiers nombres entiers est un nombre composé de trois chiffres égaux. — *Rép.* N = 36 (*J. de Vuibert*).

513. Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, les deux expressions $11a + 2b$ et $18a + 5b$ sont à la fois divisibles ou non divisibles par 19; elles ne peuvent avoir d'autre facteur commun que 19.

(*J. de Vuibert.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

747. Soient λ, λ' les angles sous lesquels on voit d'un même point d'une ellipse, deux diamètres conjugués quelconques. Démontrer que la somme $\cot^2\lambda + \cot^2\lambda'$ est constante.

×**748.** Démontrer que l'égalité de deux des rapports

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin 2\alpha - \sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(2\alpha-\beta-\gamma)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin 2\beta - \sin\frac{1}{2}(2\beta+\gamma+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(2\beta-\gamma-\alpha)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma - \sin\frac{1}{2}(2\gamma+\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)},$$

entraîne celle des trois rapports. (Richardson.)

749. On donne deux cercles de même centre O. Par un point fixe A du cercle extérieur, on mène une sécante quelconque, rencontrant le cercle intérieur en N, N′ et le cercle extérieur en P. Trouver le lieu du point M où la droite ON coupe la tangente menée en P au cercle extérieur. (Mandart.)

750. Une parabole cubique représentée par l'équation

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$

passe par les points A, B qui ont pour ordonnées β, β'. Les tangentes en ces points, la corde AB et la courbe coupent l'axe des x aux points T, S, U, V. Démontrer que le point V est le centre de gravité des points T, S, U pour des masses proportionnelles à β'^2, β^2, $-2\beta\beta'$. (Laisant.)

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE ; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, v. Staudt et Clausen ; par M. Ed. Lucas 9

×Soustraction des nombres fractionnaires ; par M. E Gelin 92, 110

×Question 532 ; solution par M. Emmerich 95

×Question 703 ; solutions par MM. E. Gelin et Emmerich 124, 138

Question 412 ; solution par M. G. Teixeira 143

×Question 720 ; solutions par MM. E. Lemoine, Denys, etc. 175

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (P. M.) . 35, 63, 113, 139, 246

×Problème du puits ; par M. E. Gelin 111

×Problème de l'héritage ; par MM. E. Gelin, Catalan, Mister, Finck. 111, 136, 187

Théorème de Choquet (P. M.) 218

×Sur un théorème de M. Sharp ; par M. E. Catalan 245

×Question 605 ; solution d'après MM. Ch. de La Vallée-Poussin et Vladimirescu. 23

Question 680 ; solution d'après MM. Baudran et Lalisse 24

×Question 688 ; solution par MM. Joachimescu, Lalisse, etc. 25

×Question 700 ; solutions par MM. Kluyver, Lalisse, etc. 49

Question 676 ; solution par M. Laisant 98

Question 655 ; solution par M. Kluyver 117

×Question 709 ; solution par M^lle de Haas, MM. Emmerich, Déprez, etc. . . 150

×Question 715 ; solutions par MM. Soons, Emmerich, etc. ; note de M. Catalan. 208, 245

×Question 718 ; solutions par MM. Déprez, Emmerich, etc. 210

×Question 721 ; solutions par MM. Déprez, Emmerich, etc. 213

×Question 716 ; solutions par MM. Mandart, Emmerich, etc. 236

×Question 497 ; solutions par MM. H. Brocard, Laisant, etc. 258

×Question 726 ; solution et généralisation par M. Laisant 259

×Question 738 ; solution par M. C. J. François 262

(*) Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires. Pour les rectifications, voir pp. 32, 50, 80, 152, 216, 264.

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Pages.

Sur les quadrangles complets ; par M. J. Neuberg 33, 67, 81, 189
Surface et volume du tore ; par M. E. Gelin 66
Sur un problème de géométrie élémentaire ; par M. Sollertinsky 158
Formules relatives aux polygones réguliers ; par M. E. Gelin. Note de H. Brocard 160
Sur la distance de deux points ; par M. A. Poulain 184, 254
Sur les formules de la trigonométrie sphérique ; d'après M. Ed. Lucas . . 187
Théorèmes de géométrie ; par M. Sollertinsky 221
Construction d'une troisième proportionnelle ; par M. Cl. Thiry 254
Quelques théorèmes sur le centre des moyennes distances d'un système de points ; par M. H. Van Aubel 255
Question 694 ; solution par MM. Decamps, Brocard, etc. 26
Question 696 ; solutions par MM^lles Pompilianu, de Haas, etc. 47
Question 697 ; solutions par MM^lles Pompilianu, de Haas, etc. 76
Question 698 ; solutions par MM. Laurens, Decamps, etc. 77
Question 706 ; solution par M. Déprez 126
Question 704, 708 ; solutions par MM. Delahaye, Emmerich, etc. 146
Question 705 ; solution par M. Sollertinsky 149
Questions d'examens de St. Cyr (1891) 164
Question 701 ; solution par MM. Cristesco, Mandart, etc. 203
Question 710 ; solution par MM. Déprez, Mandart, etc. 205
Question 713 ; solution par M^lle de Haas et M. Sollertinsky ; note de M. Catalan 208
Question 719 ; solutions par MM. E. Lemoine et Déprez. 211
Question 717 ; solutions par MM. Mandart, Déprez, etc. 238

COURBES ET SURFACES DU SECOND ORDRE ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Questions de géométrie ; par M^me Prim 14
Sur les quadrangles complets ; par M. J. Neuberg 33, 67, 81, 189
Aire de l'ellipse microsphérique ; par M. C. E. Wasteels 83
Sur une correspondance de droites et de points ; par M. A. Poulain. . . . 88
Questions de géométrie projective ; par MM. d'Ocagne, Meurice, etc 90, 116, 265
Sur le théorème de Joachimsthal, par M. V. Jamet 105
Sur les foyers des coniques ; par M. Schoute 129
Sur la résolution des problèmes déterminés par la méthode des lieux géométriques ; par M. G. de Longchamps. 132
Propriétés de quadriques homothétiques de même centre ; par A. Mineur . . 138
Propriétés des coniques ; par M. Sollertinsky 177
Sur les moments d'inertie ; par M. J. Neuberg 226
Note sur le rayon de courbure ; par M. C. E. Wasteels 268
Question 414 ; solution par M. Anderson 41

Pages.

Question 667 ; solutions par MM. Déprez, Denys, etc. 42
Question 695 ; solutions par MM. Milne, Sohie, etc. 45
Question 689 ; solutions par MM. Laisant, Sohie, etc. 74
Question 590 ; solutions par MM. Servais et Demoulin 96
Quesion 675 ; solution par M. Liénard 98
Question 692 ; solution par M. Kluyver 100
Question 705 ; solution par M. Sollertinsky 149
Question d'examen de l'École navale de France 166
Question 685 ; solution par M. Kluyver 171
Question 714 ; solution par M. Déprez 173
Qnestion 711 ; solution par M. Liénard 206
Question 310 ; solution par M. J. Neuberg 226
Question 707 ; solution par M. Déprez 233
Question 722 ; solution par M. Verbessem 239
Questions 317 et 318 ; solution par M. Neuberg. 275
Question 723 ; solutions par MM. Genese, Déprez, etc. 278

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur une classe particulière de triangles ; par M. H. Brocard 153
Sur certaines courbes du quatrième ordre, par M. Balitrand 241
Question 575 ; solutions par MM. Meurice, Mandart, etc. 21
Question 439 ; solutions par MM. Jeřábek et Neuberg 70
Question 418 ; solution par M. Servais 93
Question 678 ; solution par MM. Denys et Lalisse 99
Question 684 : solutions par MM. Déprez, Decamps, etc... 120
Question 702 ; solution par MM. Déprez et Hacken 123
Question 416 ; solution par M. Déprez 144
Question d'examen de l'École Polytechnique de Paris 196
Question 691 ; solution par M. V. Jamet 198, 255
Question 707 ; solution par M. Déprez 233

CALCUL DIFFÉRENTIEL ; CALCUL INTÉGRAL ; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur le terme complémentaire de la série de Taylor ; par M. d'Ocagne . . . 19
Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes ; par M. E. Césaro . . . 51
Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée ;
par M. Cl. Servais ; note de M. d'Ocagne 84, 110
Courbes enveloppes et courbes tangentes (P. M.). 92
Points caractéristiques (P. M.) 93
Sur le mouvement conchoïdal ; par M. E. Habich 110
Sur les lignes de force ; par M. C E. Wasteels 258
Note sur le rayon de courbure ; par M. C. E. Wasteels 268

Pages.

Question 670; solution par M. V. Jamet 169
Question 736; solution par MM. Decamps, Peters, etc. 261

BIBLIOGRAPHIE, BIOGRAPHIE, ETC.

Préface (Programme, nom et devise de Mathesis) 7
J. Casey (P. M. et J. N.) 13
Ed. Lucas (P. M. et J. N.) 217
C. Bergmans. Arithmétique (M. Stuyvaert) 17
Apollonii Pergei quae graece extant edidit Heiberg (P. M.) 89
M. de Lépinay. Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique (P. M.) 40, 141
Cl. Thiry. Théorème de Stewart et théorie du barycentre (J. N.) 109
H. Lacouture. Géométrie élémentaire (P. M.) 143
F. Verhelst. Cours d'Algèbre élémentaire (H. Gelin) 182
B. Niewenglowski. Cours d'Algèbre (P. M.) 182
E. Carvallo. Résolution numérique des équations (P. M.) 183
L. Thélie Géométrie élémentaire. Théorèmes et problèmes (M. Stuyvaert) . 222
E. Picard. Traité d'Analyse 224
Stoffaes. Cours de mathématiques supérieures (P. M.) 251
D. Loriga. Tres capitulos de Geometria superior 253
B. V. Moreira de Sa. Arithmetica 253
G. Frege. Function und Begriff 253
M. d'Ocagne. Nomographie (P. M.) 271
Z. de Galdeano. Generación de los conceptos matematicos 272
Z. de Galdeano. Algebra (d'après G. Teixeira) 273
Z. de Galdeano. Geometria elemental (d'aprés G. Teixeira) 273
G. Lazzeri e A. Bassani. Elementi di Geometria (d'après F. Giudice) . . 274
Amigues. Leçons d'Algèbre 275

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 466-468, 469-470, 471-474, 475-489, 490-493, 494-497, 498-503 504-505, 506-508, 509-513 . . . . pp. 27, 50, 78, 101, 127, 214, 240, 263, 280,
Concours de Saint-Cyr (1891) (J. N.) 164
Concours de l'École Navale de France (1891) (J. N.) 166
Concours de l'École Polytechnique de Paris (1891) (J. N.) 197

SUPPLÉMENTS.

P. Mansion. Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non euclidienne . . . . . pp. 1-32
C. Le Paige. Un astronome belge du XVII^e siècle. Godefroid Wendelin pp. 1-19
Cl. Thiry. Distances des points remarquables du triangle. . . . . pp. 1-8

QUESTIONS(*).

	POSÉE (1) I ou (2) I	RESOL. (2) I
17	30 (28)	
95	206 (28)	
	(1) III ou (2) I	
252	143 (28)	
267	175 (28)	
	(1) IV ou (2) I	
310	48	230
317	71	275
×318	71	276
×333	119 (29)	
×346	143	R
353	159	R
×356	159	R
×357	159	R
383	231 (29)	
387, 2e p.	231 (29)	
	(1) V ou (2) I	
411	23 (29)	
412	23 (29)	143
414	46	41
416	46	144
418	47	93
439	119	70
×497	280 (30)	258
	(1) VI ou (2) I	
505, 2e p.	(30)	
×513	71 (30)	
519	119 30)	
532	192 (30)	95
	(1) VII ou (2) I	
×571	126 (30)	R
575	148	21
590	240	96
594	264 (31)	
597	280	
598	280 (31)	

	POSÉE (1) VIII ou (2) I	RÉSOL. (2) I
×605	56	23
×634	279	R
×635	279 (31)	
	(1) IX ou (2) I	
643	88	R
655	172	117
667	264	42
670	280 (31)	168
	(1) X ou (2) I	
675	48, 278	98
676	48 (32)	80,98
×677	72	R
678	72	99
680	72	24
×681	95	R
684	128	120
685	128	171
×688	152	25
689	176	74
691	216	198,255
692	216	100
×694	216	26
695	240	45, 70
×696	240	47, 70
×697	264	76
698	264	77
699	279	R
×700	279	49
	(2) I	
×701	32, 79	203
702	32	123
×703	32	124
×704	50	146
705	50	149
706	50	126
707	80	233
×708	80	146
×709	80	150

	POSÉE (2) I	RÉSOL. (2) I
×710	80	205
711	80	206
×712	103	R
×713	104	208
714	104	173
×715	104	208
×716	104	236
×717	104	238
×718	104	210
×719	104	211
×720	104	175
×721	128	213
722	128	239
723	128	278
×724	128	R
×725	152	
×726	152	259
×727	152	R
728	152	
729	176	R
730	176	R
×731	176	
×732	176	R
733	215	R
734	216	R
735	216	R
736	216	261
×737	216	R
×738	216	262
739	240	R
×740	240	R
741	240	R
742	240	R
743	263	R
744	264	
×745	264	R
746	264	R
747	281	
×748	281	
749	281	
750	281	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R ; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

TABLE DES NOMS

Abel, 273.
Agnesi, 92.
Alembert (d') 272
Amigues, 218, 275.
Anderson, 41.
Anonyme, 76.
Anthony, 104, 175.
Apollonius, 39 273.
Archimède, 40, 273.
Aronhold, 273.
Balitrand, 241.
Bassani, 274.
Baudran, 24, 26, 70.
Belanger, 251.
Bellens, 76, 77, 126.
Beltrami, 273.
Bergmans, 17, 110.
Bernoulli, 12.
Bertrand (J) 111, 218, 225, 273
Besso, 215.
Beyens, 45, 47, 76.
Bézout, 273, 275.
Binet, 273.
Bolyai, 273.
Bonnet (O.) 20.
Boole, 273.
Booth, 153, 157.
Bouquet, 273.
Bourrienne, 128
Bozóky (de), 26, 49, 75, 76, 120, 238.
Brandza, 26, 48, 70, 75, 76.
Brasseur, 110.
Brioschi, 273.
Briot, 220, 273.
Brocard, 26, 32, 73, 99, 120, 123, 153, 198, 210, 213, 236, 255, 259, 262.
Budan, 183
Cambier, 32, 79, 201, 264.
Cantor, 225.
Carvallo, 183.
Catalan, 28, 30, 49, 66, 76, 136, 151, 176, 187, 216, 245, 259, 261.
Casey, 12. 42, 191.
Cauchy, 20, 219, 272.
Cayley, 225, 273.
Cesáro (E), 25, 29, 30, 31, 49, 51. 95, 119, 168
Chasles, 75, 178, 273.
Choquet, 218.
Clausen, 9.
Clebsch. 273.
Comberousse (de), 143, 218.
Cramer, 273.
Crelle, 132, 184, 189, 226.
Cremona, 266.
Cristesco. 25, 26, 47. 48, 75, 76, 123. 204, 205, 210, 211, 237, 238.
Darboux, 226.
Decamps, 25, 26. 47, 48, 76, 77, 120, 124, 126, 151, 173. 175, 205, 208, 213, 261, 278.
Dedekind, 273.
Delahaye, 146, 175, 205, 213.
Delambre 187.
Demoulin, 97.
Denys, 25. 26. 42. 99, 123, 151, 173, 175, 205, 213, 238.
Déprez, 26, 42, 50, 70, 71, 74, 77. 78, 120, 121, 123, 124, 126, 144, 149, 151, 173, 204, 205, 206, 208, 212, 213, 216, 233, 238, 259, 278, 279.
Desargues, 265, 273.
Descartes, 39, 183 273, 275.
Despeyrous, 226.
Dewulf, 21, 41, 93, 96, 144.
Dirichlet, 225, 273.
Dupin (Ch.). 225, 269
Duran Loriga, 253
Edwards, 104, 211.
Emmerich, 95, 126, 146, 151, 175, 205, 208, 210, 213, 236, 238.
Encke, 184.
Euclide, 40, 273
Euler, 9, 187, 225, 272, 275.
F. (F.), 77.
Faure, 231.
Fermat, 9, 40, 175, 272
Finck, 187.
Fourier, 225.
François, 47, 49. 76. 78, 146, 175, 205, 238, 242.
Frege, 253.
Galois, 273
Galdeano (Garcia de), 272, 273.
Gauss, 225, 273.
Gelin (E.), 66. 80, 92, 111, 124, 136, 160, 182, 240.
Genese 264, 278.
Gergonne, 148, 221, 222.
Gillet (J.), 275.
Giudice, 274.
Gob, 45, 68, 159, 278.
Gräfe, 184.
Grassmann, 273.
Greenstreet, 175, 208, 216. 236, 240, 262, 280.
Grégoire de St.-Vincent, 273.
Günther, 153.
Haas M^lle de), 46 47, 76, 78, 151, 205, 208, 213, 238.
Habich, 110
Hacken, 123.
Halley, 39.
Hamilton 273.
Hankel, 273.
Heiberg 39.
Helmholtz. 273.
Hermès, 122.
Hermite. 273.
Hesse, 226.
Huet, 255
Jacobi, 273.
Jamet, 104, 168, 198, 255, 264.
Jeřábek, 70, 76, 122.
Joachimescu, 25, 75, 175, 209, 233, 261
Joachimsthal, 105, 225, 245.

Jordan, 273.
Keelhoff, 74, 77, 176, 262.
Kluyver, 49, 100, 117, 171.
Knops, 126.
Kronecker, 273.
Kummer, 273.
Lacouture, 142.
Lachlan, 152.
Lagrange, 184, 254, 272
Laguerre, 242.
Lahire, 273.
Laisant, 26, 45, 49, 74, 98, 128, 256, 258, 278, 281.
Lalanne, 119, 271.
Lalisse, 24, 25, 26, 43, 49, 70, 76, 77, 99
Lallemand, 271.
Laplace, 224
Laurens, 70, 77.
Lazzeri, 274.
Lebon, 103.
Legendre, 273.
Leibniz, 272.
Lemoine, 31, 80, 119, 175, 205, 206, 211, 233, 235, 278.
Leudesdorff, 80, 150, 205.
Liénard, 21, 76, 78, 98, 173, 204, 206
Liouville, 87, 273.
Lipschitz, 273.
Lobatschewsky, 273.
Longchamps (de), 74, 80, 104, 132, 206, 216, 221, 275.
L'Hospital, 182, 218.
Lucas (Ed.), 9, 28, 100, 164, 187, 217.
M'Cay, 193.
Macé de Lépinay, 40, 141.
Maclaurin, 20, 53, 182.
Mac-Mahon, 30, 258.
Mandart, 21, 49, 50, 76, 126, 146, 148, 151, 175, 204, 205, 210, 237, 281
Mannheim, 77, 87.
Mansion, 35, 46, 63, 92, 93, 113, 139, 158, 183, 184, 217, 246, 251, 271.
Massau, 271.
Matrot, 218.
Merino, 184.
Meunier, 225.
Meurice, 21, 91, 103, 128, 208.
Milne, 45.
Mineur, 138.
Mister, 136.
Möbius, 273.
Monge, 273.
Morel, 124.
Moréra, 253.
Mosnat, 259.
Moutard, 30.
Nagel, 221, 222.
Neper, 19, 235
Neuberg, 25, 29, 31, 33, 50, 67, 73, 84, 103, 109, 110, 117, 126, 132, 159, 189, 217, 226, 240, 266, 267, 275.
Newton, 208, 218, 268, 272
Nicolaïdès, 88.
Niewenglowski, 176, 182, 218, 275.
Novarese, 24
Ocagne (d'), 19, 87, 88, 90, 110, 116, 271
Painvin, 231, 232.
Pascal, 272.
Pelz, 122
Perrin, 32, 124.
Peters, 261
Picard, 224.
Poinsot, 272.
Poisson, 225.
Pompilianu (Melle), 26, 47, 76, 261
Poncelet, 273.
Poulain, 88, 184, 254.
Prim (Mad.), 14, 76.
Prior, 259.
Puiseux, 273
Reye, 225.
Richardson, 281.
Riemann, 273.
Roberval, 273.
Robin, 225.
Rogier, 31.
Rolle, 20, 183, 275.
Rosanes, 31.
Rouché, 143.
Rowe, 29.
Russo, 26, 49, 126, 151, 175, 205
Saint-Germain, 185.
Salmon, 88.
Schlömilch, 226.
Schoute, 129, 264, 278.
Schröter, 31, 122.
Serenus, 40.
Serret (A.) 20, 273
Serret (P.) 233
Servais (Cl.) 22, 42, 45, 93, 96, 128, 238, 239.
Sharp, 104, 208, 245.
Simson, 195, 222.
Sluse, 273.
Sohie, 25, 47, 48, 75, 76, 77.
Sollertinsky, 33, 77, 78, 116, 148, 149, 158, 176, 177, 194, 195, 208, 210, 216, 238, 265.
Soons, 175, 208, 237, 238.
Staudt (von), 9, 273.
Steiner, 132, 184, 189.
Stewart, 109, 184, 254.
Stoffaes, 251.
Stokes, 225.
Strekalof (de), 25, 49, 213, 262.
Sturm, 183, 273.
Stuyvaert, 19, 224.
Sylvester, 32, 98, 273.
Tarry, 98, 171.
Taylor, 19, 182, 183, 275.
Taylor (H. M.), 29.
Teixeira, 143, 253, 262, 273, 274.
Terquem, 271.
Terrier, 33, 194.
Thélie, 222.
Thiry (Cl.), 26, 47, 76, 109, 151, 184, 254.
Tortolini, 153.
Tucker, 104, 128, 173, 213.
Vallée-Poussin (de la), 23, 25, 26.
Van Aubel (H), 255.
Vandermonde, 273.
Valyi, 31.
Verbessem, 239
Verhelst (F.), 48, 182.
Vigarié, 221.
Vladimirescu, 23, 26, 47, 76, 78, 173, 238.
Vuibert, 101, 102, 103, 117, 281.
Walecki, 183, 275.
Waring, 273.
Wasteels, 83, 253, 268.
Weierstrass, 273.
Weill, 29, 163, 235.
Wilson, 9, 11.

NOTES

SUR

LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

ET

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

PAR

P. MANSION

Professeur ordinaire à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie royale de Belgique.

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

1. Parmi les géomètres qui au commencement de ce siècle ont bien reconnu les difficultés que présente un exposé scientifique de la géométrie élémentaire, on peut citer le grand AMPÈRE. On trouve, en effet, dans sa *Philosophie des sciences*, le curieux passage suivant :

« Reid a montré que si l'homme était réduit au simple sens de la vue, ne pouvant dès lors connaître que l'étendue superficielle à deux dimensions, et prenant pour des lignes droites ce qui serait réellement des arcs de grands cercles tracés sur une surface sphérique dont le centre serait dans son œil, les triangles qu'il considérerait comme rectilignes pourraient avoir deux angles ou même leurs trois angles droits ou obtus, et que la géométrie d'un tel homme serait toute différente de la nôtre, deux de ces lignes qu'il prendrait pour droites se rencontrant, par exemple, toujours en deux points, en sorte que la notion de deux droites parallèles serait contradictoire pour lui ».

« Enfin, on sait que le théorème fondamental de la théorie

des parallèles, lorsqu'on les considère comme existant réellement, dans l'espace à trois dimensions, ne peut être rigoureusement démontré. C'est que ce théorème est fondé sur des propriétés de l'espace qui supposent les trois dimensions et l'infinité de l'étendue (*) ».

2. Fourier, dès 1795, avait aussi signalé quelques-unes des difficultés de la géométrie ordinaire (**) et avait proposé de définir nettement la sphère, le plan et la droite, au moyen de l'idée de distance seule, considérée comme notion première irréductible : la sphère est le lieu des points équidistants d'un seul point, le plan est le lieu des points dont les distances à deux points fixes sont égales, la droite celui des points dont les distances à trois points fixes sont égales. Monge fit diverses objections aux vues de Fourier, mais sans se douter que ces définitions peuvent conduire indifféremment à la *géométrie euclidienne* ou aux deux sortes de *géométrie non euclidienne*.

M. De Tilly, dans son *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (1879), a montré, en effet, que l'on peut établir les principes de la *géométrie générale*, en partant de définitions analogues à celles de Fourier; il avait prouvé antérieurement (1873) l'impossibilité de démontrer le postulat de la parallèle unique, non seulement par une construction plane, mais aussi par une construction quelconque. Les trois espèces de géométrie sont caractérisées par les relations qui existent

---

(*) Ampère, *Essai sur la philosophie des sciences*. Première partie (Deuxième édition; Paris, Mallet-Bachelier, 1856), p. 64. Ampère ajoute : « Les vérités géométriques ont donc une réalité objective qui ne se trouve pas dans celles de l'arithmologie ». Deux pages plus haut, il dit encore : « Les vérités dont se composent l'arithmologie résultent de l'identité des nombres représentés sous différentes formes au moyen des signes convenus, tandis que les théorèmes de la géométrie ne sont vrais qu'en vertu des propriétés de l'espace ». Et plus loin : « Or, que ces distinctions successives (surface, ligne, point) s'arrêtent à la troisième, cela ne dépend pas de la nature de notre esprit, mais d'une propriété de l'espace, tel qu'il existe réellement, et qu'on exprime en disant qu'il a trois dimensions ».

(**) *Séances de l'École normale; Débats*, t. I^er^, pp. 28-33; séance du 26 pluviose an III (14 février 1795), sous le titre : *Géométrie descriptive*, Monge professeur. Le passage complet est reproduit dans *Mathesis*, 1889, t. IX, pp. 139-141.

entre les trois côtés d'un triangle et l'un de ses angles, savoir :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right)\sin\left(\frac{c}{k}\right)\cos A, \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\mathrm{Ch}\left(\frac{a}{l}\right) = \mathrm{Ch}\left(\frac{b}{l}\right)\mathrm{Ch}\left(\frac{c}{l}\right) - \mathrm{Sh}\left(\frac{b}{l}\right)\mathrm{Sh}\left(\frac{c}{l}\right)\cos A, \quad . \quad . \quad (3)$$

où k est la constante du système spécial de géométrie (2), l celle du système (3) (*).

3. On peut caractériser autrement les trois systèmes de géométrie, en ne faisant intervenir que les distances, et en excluant les angles, comme nous l'a fait observer M. De Tilly dans des communications encore inédites (**). La géométrie euclidienne (à trois dimensions), dans cette manière de voir, est contenue tout entière dans la relation de Lagrange entre les dix distances de cinq points. Cette relation a été mise par CAYLEY sous la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ 1 & d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

symétrique par rapport aux carrés d_{ik}^2 des dix distances. Si l'on représente cette relation par $(12345) = 0$, et les relations analogues entre les points 1, 2, 3, 4, 6 et 1, 2, 3, 5, 6 par $(12346) = 0$

(*) Au point de vue analytique, on peut observer que (2) contient (3), si l'on fait $k = l\sqrt{-1}$, et (1) si l'on fait $k = \infty$. On peut faire la même observation au § III, sur les trois relations analogues à (4) : elles rentrent aussi l'une dans l'autre, moyennant des substitutions analogues. De plus, on pourrait y remplacer chaque distance Δ de deux points par une fonction quelconque $\varphi(\delta)$ d'une autre quantité, qui pourrait aussi être appelée distance de ces points, à un point de vue abstrait. Nous ne regardons pas comme distinctes la relation entre les dix distances Δ ou les dix distances δ de cinq points.

(**) Voir toutefois le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e sér., t. XIV (1887), p. 1015, lignes 21 à 25.

et (12356) = 0, on sait que ces relations (12345) = 0, (12346) = 0 et (12356) = 0, ont pour conséquences (12456) = 0, (13456) = 0 et enfin (23456) = 0.

Des relations analogues à (4) et jouissant de la même propriété caractérisent les deux sortes de géométrie non euclidienne, mais elles n'ont pas été données explicitement jusqu'ici.

La vérité la plus importante de la géométrie générale est celle-ci : il n'existe que trois relations analogues à (4) jouissant de la propriété signalée plus haut, laquelle exprime l'homogénéité de l'espace (*). Si l'on parvenait à démontrer directement ce théorème d'analyse, il en résulterait probablement une grande simplification dans l'exposé de la géométrie générale.

4. La géométrie euclidienne est contenue implicitement tout entière dans la relation (4). La géométrie euclidienne plane est renfermée implicitement dans la relation analogue qui lie les distances x, y, z d'un point aux trois sommets d'un triangle ayant pour côtés a, b, c, savoir :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & z^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 & y^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 & x^2 \\ 1 & z^2 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou même dans la relation de Stevart, $b^2y + c^2z = ax^2 + ayz$. si $a = y + z$.

Rien n'empêche d'introduire les angles *d'une manière purement formelle,* dans cette géométrie où tous les théorèmes sont des relations entre les distances. Il suffit de définir les angles A, B, C d'un triangle par les formules

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}.$$

A, B, C n'ont ici aucune signification géométrique. La rela-

(*) Pour que ceci soit vrai, pris à la lettre, il faut préciser la notion de distance par cette condition supplémentaire : la somme 12 + 23 des distances 12, 23 a pour minimum la distance 13, quand 2 varie, 1 et 3 étant fixes.

tion de Stevart exprime que les angles (xy), (xz) sont supplémentaires. On prouve aisément que $A + B + C = \pi$, angle (bx) + angle (cx) = angle (bc) ; angle (ab) = angle (zb), angle (ac) = angle (yc).

Grâce à cet emploi apparent des angles, on peut rapprocher l'exposé scientifique de la géométrie euclidienne de celui que l'on emploie ordinairement dans les manuels élémentaires (*). (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1888-1889, t. XIII, 1re partie, pp. 57-61.)

SUR LES POSTULATS ET LES AXIOMES D'EUCLIDE.

1. *Énumération des postulats et des axiomes.* Après les définitions du livre I des *Éléments* d'Euclide, on trouve, dans la plupart des manuscrits et des éditions de ce livre célèbre, quinze propositions rangées sous deux titres distincts : *Postulats* et *Notions communes* ou *axiomes*. Voici ces propositions, dont nous empruntons la traduction à M. P. Tannery (**).

Postulats. 1. Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite (I, 1).

2. Et de prolonger, en ligne droite et en continuité, une droite limitée (I, 2).

3. Et de décrire un cercle de tout centre et de tout rayon (I, 1).

4 (Axiome 10, dans Grégory). Et que tous les angles droits soient égaux entre eux (I, 14).

5 (Axiome 11, dans Grégory). Et que, si une droite rencontrant deux droites fait du même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolon-

---

(*) Ceci suppose la trigonométrie générale établie indépendamment de la géométrie euclidienne. C'est ce qu'a fait Seidel dans le *Journal de Crelle*, 1871, t. LXXIII, pp. 273-291, d'une manière assez élémentaire (Voir Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis*, II, pp. 75-82).

(**) *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide* (Bulletin de Darboux, 2e série, 1884, t. VIII, 1re partie, pp. 162-175), pp. 163-164. Nous indiquons, d'après M. P. Tannery, la première proposition des Éléments où Euclide fait usage de chaque postulat ou axiome.

gées indéfiniment se rencontrent du côté dont la somme est inférieure à deux droits (I, 29).

6 (Axiome 12, dans Grégory; axiome 9, dans Heiberg). Et que deux droites ne comprennent pas d'espace (I, 4).

Notions communes ou axiomes. 1. Les choses égales à une même sont aussi égales entre elles (I, 1).

2. Et si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, les sommes sont égales (I, 13).

3. Et si, de choses égales, on retranche des choses égales, les restes sont égaux (I, 3).

4. Et si, à des choses inégales, on ajoute des choses égales, les sommes sont inégales (I, 17).

5 (Supprimé dans Heiberg). Et si, de choses inégales, on retranche des choses égales, les restes sont inégaux (III, 17).

6 (5 dans Heiberg). Et les doubles d'une même chose sont égaux entre eux (I, 42).

7 (6 dans Heiberg). Et les moitiés d'une même chose sont égales entre elles (I, 37).

8 (7 dans Heiberg). Et les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles (I, 4).

9 (8 dans Heiberg). Et le tout est plus grand que la partie (I, 6).

2. *Les postulats et axiomes dans les manuscrits et les éditions savantes.* M. Heiberg, dans son édition, a tenu compte principalement de quatre manuscrits qu'il désigne par les lettres P, B, F et V : les trois derniers représentent la recension de Théon (vers 370 après J.-C.), et le premier, une recension antérieure. De plus, il a consulté, pour le premier livre spécialement, deux autres manuscrits qu'il dénote par les lettres *b* et *p* et qui appartiennent aussi au groupe théonien. Dans ce groupe, d'ailleurs, d'après M. Heiberg, F est de beaucoup le meilleur (*).

Les manuscrits P, F et des retouches faites au manuscrit V donnent le postulat 6 à la place indiquée au n° 1 ; les manuscrits V, *b*, *p* le placent au contraire après les axiomes ou notions

(*) T. V, p. XXXVII. M. Heiberg dit : F *Theoninorum longe optimus est.*

communes; B le place aussi après les axiomes, mais avec le verbe à l'infinitif, comme si toute la phrase dépendait de : *il est demandé*. Le manuscrit B ne contient pas non plus l'axiome 5, qu'on ne trouve qu'en marge dans F et *b;* dans *p*, il est ajouté après coup.

Quant aux principales éditions, voici comment elles disposent les quinze propositions :

1° L'édition de Campanus, qui a été faite d'après un Euclide arabe, et celle de Peyrard (1814-1818), qui suit surtout l'excellent manuscrit P du Vatican, ont les postulats et les axiomes dans l'ordre indiqué plus haut.

2° L'édition princeps de Bâle (1533), faite sur de mauvais manuscrits, et celle d'Oxford (1703), de D. Grégory, qui s'appuie sur celle de Bâle, reportent les trois postulats 4, 5, 6 après les axiomes (*).

3° L'édition latine de Commandin (1572) rejette le postulat 6 après les axiomes. D'après ce que nous apprend M. Heiberg, Commandin s'est servi, pour faire sa traduction, non seulement de l'édition de 1533, mais aussi d'un manuscrit grec.

4° M. Heiberg, dans sa belle édition des *Éléments* (1883-1888), met le postulat 6 à la même place que Commandin, parmi les axiomes, mais il le regarde comme interpolé, ainsi que les axiomes 4, 6, 7 ; quant à l'axiome 5, il l'exclut même du texte grec, bien qu'il dise en note qu'on le trouve ordinairement dans les manuscrits et les éditions; de plus, pour lui, 8 et 9 sont douteux.

3. *Opinion de MM. P. Tannery et Heiberg sur les postulats et les axiomes.* M. P. Tannery s'est occupé deux fois au moins des axiomes et des postulats d'Euclide. Dans un premier article intitulé : *Quelques fragments d'Apollonius de Perge* (Bulletin de Darboux, 2e série, t. V, 1re partie, pp. 124-136), Proclus, dit-il, « ne reconnaissait comme postulats que les trois relatifs à la construction de la droite et du cercle, dont le caractère particulier semble garantir l'adoption comme tels par Euclide

(*) C'est pourquoi souvent les postulats 4, 5, 6 sont désignés comme axiomes 10, 11, 12. Il en est de même dans l'édition de Dasypodius (1564).

et leur inscription par lui en tête des propositions. Il est bien douteux, au contraire, que l'auteur des *Éléments* se soit jamais proposé de réunir en tête de son livre les divers lemmes qu'il a admis comme accordés dans le cours de ses propositions. S'il avait fait ce travail, il eût certes évité d'en accroître autant le nombre, et surtout de prendre comme axiomes des théorèmes dont la démonstration est facile. » Suivant M. Tannery, on pouvait démontrer les axiomes 1 à 7 au moyen de 8 et 9. « Quant aux prétendus axiomes 10 (de l'édition de Grégory, c'est-à-dire le postulat 4), l'égalité de tous les angles droits, 12 (même édition, postulat 6), que deux droites ne peuvent limiter un espace, le premier est certainement un théorème oublié par Euclide; le second, lemme admis dans I, 4, pouvait être considéré par lui comme rentrant dans le premier postulat. »

Dans le second article, déjà cité plus haut à propos de la traduction des quinze postulats ou axiomes, la question est traitée plus longuement.

« Les trois premiers postulats, dit M. Tannery, ont un caractère tout particulier; ce ne peut être certainement qu'un profond penseur qui conçut le premier l'idée originale de réduire les constructions élémentaires au minimum de trois et de les *formuler en postulats* » (p. 164).

« Mais ces postulats mis à part, l'impression que donne le reste est que l'on a ultérieurement recherché dans le premier livre des *Éléments* tout ce qui y était admis sans démonstration et que les propositions formulées à la suite de cette recherche ont été classées tant bien que mal. Déjà Geminus, un siècle avant J.-C., voulait séparer les postulats 4 et 5, qu'il considérait comme des théorèmes à démontrer. Il avait incontestablement raison en ce qui concerne le postulat 4; mais il semble que, si Euclide avait le premier formulé cette proposition, il ne se serait pas mépris sur son caractère, pas plus qu'il n'aurait été arrêté par la difficulté d'une démonstration.... Quant au fameux énoncé relatif aux parallèles, il est au contraire certain qu'Euclide a dû essayer de le démontrer et renoncer à ses inutiles recherches; il le postule nettement, quoique sous une forme beaucoup plus brève, au cours de la proposition XXIX » (pp. 164-165).

« Si l'on veut ne conserver comme véritablement euclidiens que les axiomes réellement dignes de l'auteur des *Éléments*, on est conduit à ne lui attribuer, *au premier abord*, que les trois premiers postulats et peut-être aussi les trois premières notions communes, mais pour ces dernières le doute est très sérieux » (p. 167).

Mais peut-être peut-on aussi supposer qu'Euclide a trouvé, dans les Éléments antérieurs, les définitions, les trois premiers postulats; il a ajouté 4 pour ne pas remanier les définitions de l'angle aigu et de l'angle obtus, 5 parce qu'il le fallait bien; quant aux notions communes, elles auraient été extraites ultérieurement des Éléments. Cependant on peut aussi soutenir l'opinion contraire; car Autolycus, Aristarque de Samos, Archimède énoncent aussi, sous diverses dénominations, en tête de leurs écrits, des postulats du genre de ceux que l'on trouve dans les meilleurs manuscrits d'Euclide, avant les notions communes. Mais « il me semble plus glorieux pour Euclide d'avoir énoncé seulement les trois postulats de construction » (p. 173).

Comme on le voit, sans se prononcer nettement dans la question, M. P. Tannery n'admet au fond l'authenticité que des cinq premiers postulats, et encore fait-il des réserves relativement à 5 et surtout à 4; mais cette opinion est fondée principalement sur des raisons d'une nature plus ou moins subjective.

M. Heiberg (*) arrive à une conclusion différente en tenant compte davantage des données des manuscrits. Parmi les postulats, le 6e seul lui paraît interpolé, parce qu'il n'a pas une place fixe dans ces manuscrits. Quant aux notions communes, il est difficile de les rejeter en bloc. On sait par Proclus qu'elles existaient déjà du temps d'Apollonius. A qui les attribuer, avant celui-ci, si ce n'est à Euclide même? Elles sont distinguées par leur forme extérieure des postulats qui débutent par les mots : *qu'il soit demandé*. Les axiomes 1, 2, 3 au moins sont d'Euclide; 8 et 9 sont un peu douteux, parce que Héron ne les connaît pas, ni Capella; mais elles sont dans Proclus. Proclus, en revanche, n'a pas 4, 6 et 7, qui sont donc presque certaine-

(*) *Prolegomena*, pp. LXXIX et XC.

ment interpolés; quant à 5, il manque dans plusieurs bons manuscrits, comme on l'a dit plus haut. Euclide n'a sans doute admis en fait d'axiomes, en tête des Éléments, que ceux qui avaient une portée générale, savoir 1, 2, 3, 8, 9, bien qu'il en emploie beaucoup d'autres dans le courant de ses démonstrations.

4. *Raisons d'attribuer tous les axiomes à Euclide.* Au premier abord, il semble difficile d'échapper à la conclusion de Heiberg touchant les axiomes, et l'on est tout disposé à rejeter, avec lui, 4, 5, 6, 7, parce qu'ils ne sont admis ni par Héron, ni par Proclus, bien qu'ils se trouvent dans de bons manuscrits.

Mais la question change de face quand on l'examine de plus près. Dans Euclide, on ne peut donner au mot *égal* que le sens du mot français *équivalent*, c'est-à-dire *composé de parties superposables*. Or, quand on part de cette notion précise, on reconnaît aisément que les notions communes 1, 2, 3, 6, 8 sont de vrais axiomes, ou au moins des théorèmes faciles à démontrer; mais, comme on l'a remarqué à propos de l'une des autres notions communes (*), il semble très difficile d'établir 3, 4, 7, 9 d'une manière élémentaire, bien qu'on ne puisse guère douter de la vérité de ces propositions. Les neuf notions communes, d'ailleurs, se tiennent étroitement : ainsi 4 peut se déduire de 3, et réciproquement; 2, 3, 4, 5 forment un groupe naturel; il en est de même de 6 et 7 et de 8 et 9.

Euclide, *esprit systématique et rigoureux* (**), a pu voir, aussi bien que les modernes, les difficultés de la théorie de l'équivalence des figures et les relations logiques entre les neuf notions

---

(*) Faifofer, *Elementi di Geometria* (3e édition, 1882, Venise), p. 194, a le premier, croyons-nous, fait remarquer que l'on admet implicitement, dans maintes démonstrations relatives à l'équivalence, qu'*une figure ne peut être équivalente à l'une de ses parties*, bien que ce ne soit pas évident. Dans la 6e édition du même ouvrage (Venise, 1888), il prouve les axiomes 1, 2 d'Euclide et il postule 9, p. 198. Voir les articles de MM. Faifofer et De Paolis sur l'axiome 3, dans le *Periodico di Matematica* de Besso (Rome, 1886), t. I, pp. 13-15, 44-46.

(**) « Euclide, dit le résumé de l'histoire de la géométrie d'Eudème, rassembla les Éléments, *arrangea* beaucoup de ce qu'Eudoxe avait découvert et *compléta* ce qui avait été commencé par Théétète; ensuite il substitua des *preuves irréfutables* aux démonstrations trop laxes de ses prédécesseurs. »

communes employées par ses prédécesseurs et par lui-même dans les Éléments. Dès lors, il est tout naturel de lui attribuer les neuf axiomes, parce qu'ils forment un ensemble de vérités indispensables pour l'établissement de la géométrie (*). Quant à Héron et à Proclus, ils ne sont pas, au point de vue scientifique, des autorités suffisantes pour nous faire rejeter le témoignage de bons manuscrits, quand il est d'accord avec les principes et avec l'idée que l'on se fait du génie d'Euclide.

5. *Les postulats 4, 5, 6, au point de vue de la géométrie non euclidienne.* Nous croyons que l'on doit attribuer les postulats 4, 5, 6 à Euclide, aussi bien que les axiomes 1 à 9; mais avant d'exposer les raisons qui militent en faveur de cette manière de voir, il est utile d'examiner ces postulats à la lumière des spéculations modernes sur la géométrie non euclidienne. Or, à ce point de vue, selon nous, on doit reconnaître qu'ils sont l'équivalent des postulats regardés aujourd'hui comme nécessaires et suffisants pour exposer scientifiquement la géométrie ordinaire ou géométrie euclidienne.

On peut caractériser les divers systèmes actuels de géométrie où l'on admet comme point de départ la continuité et l'homogénéité de l'espace, par la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle. Dans la géométrie riemannienne, cette relation est

$$\cos a\varepsilon = \cos b\varepsilon \cos c\varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

a désignant l'hypoténuse, b et c les côtés, ε une constante qui caractérise l'*espèce* de géométrie considérée dans le *genre* riemannien (**). Dans la géométrie de Lobatschewsky, la relation est

$$\mathrm{Ch}\, a\eta = \mathrm{Ch}\, b\eta \,\mathrm{Ch}\, c\eta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) Il forme la *στοιχείωσις* des axiomes, comme l'ensemble de ses définitions forme celle des vocables géométriques, suivant une remarque de Heiberg (*Proleg.*, p. LXXXIX).

(**) Lorsque l'on donne à ε diverses valeurs, on trouve diverses géométries riemanniennes. Ainsi, si $\varepsilon = 1$, et si $c = b$, l'hypoténuse a du triangle rectangle isocèle de côté b est donnée par la relation $\cos a = \cos^2 b$; si $\varepsilon = 2$, l'hypoténuse a' du triangle rectangle isocèle de côté b serait donnée par $\cos 2a' = \cos^2(2b)$. On ne peut avoir $a' = a$, comme il est aisé de le voir. L'espace correspondant à $\varepsilon = 1$ n'est pas homogène avec l'espace

où η est aussi une constante spécifique caractéristique. Au point de vue analytique, chacune des relations (1) ou (2) contient l'autre, si l'on y fait $\varepsilon = \eta\sqrt{(-1)}$, ou $\eta = \varepsilon\sqrt{(-1)}$. Pour ε ou η nul, les deux relations précédentes deviennent

$$a^2 = b^2 + c^2 ;$$

celle-ci caractérise la géométrie euclidienne.

Dans toute géométrie, on est forcé d'admettre comme postulat fondamental l'*invariabilité des figures* (*), c'est-à-dire, par exemple, qu'un triangle rectangle isoscèle de côté *b*, d'hypoténuse *a*, est toujours identique à lui-même, en quelque endroit qu'on le suppose placé; ou, si l'on veut, qu'il n'y a pas des lignes droites de deux sortes dans une même espèce de géométrie. Ce principe n'est-il pas l'équivalent du quatrième postulat d'Euclide : *Les angles droits sont égaux?* Les démonstrations de cette proposition ne supposent-elles pas l'invariabilité des figures, ou, au moins, qu'il n'y a qu'une espèce de ligne droite? On peut donc dire que le postulat 4 d'Euclide, ou un autre équivalent, est indispensable pour établir une géométrie quelconque.

Le postulat 5 n'est vrai que dans la géométrie euclidienne et dans celle de Riemann, autrement dit, il exclut la géométrie de Lobatschewsky; le postulat 6 est vrai dans la géométrie euclidienne et dans celle de Lobatchewsky, c'est-à-dire qu'il exclut la géométrie de Riemann.

Les postulats 4, 5, 6 sont donc indispensables pour établir la géométrie usuelle d'une manière scientifique. Ils sont d'ailleurs suffisants aussi, comme on peut le déduire, croyons-nous, des recherches contenues dans l'*Essai* de M. De Tilly (**).

---

correspondant à $\varepsilon = 2$. Les angles droits de l'une ne sont pas identiques à ceux de l'autre. On peut faire des remarques analogues sur les géométries caractérisées par les diverses valeurs de η.

(*) De Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (Bordeaux, 1879). n° 27, p. 18.

(**) M. De Tilly prend pour deuxième et troisième postulats fondamentaux les suivants: *La distance de deux points de l'espace n'a pas de limite supérieure et peut augmenter indéfiniment; par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle a cette droite* (*Essai*, n° 39, p. 24, et n° 121, p. 71); ces postulats réunis équivalent aux postulats 6 et 5 d'Euclide, sans qu'ils leur soient équivalents séparément.

6. *Raisons d'attribuer les postulats 4, 5, 6 à Euclide.* Au point de vue de la rigueur absolue, on doit donc regarder les postulats 4, 5, 6 comme aussi dignes d'être attribués à Euclide que les postulats 1, 2, 3 de construction.

Mais, nous dira-t-on, Euclide n'avait évidemment aucune idée de ces géométries de Riemann et de Lobatschewsky, qui ont conduit les modernes à une étude critique des principes de la géométrie et à la réduction des postulats à un nombre minimum.

A cette objection, nous répondrons : Qu'en sait-on ? Le P. Saccheri, dans son *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Milan, 1733), n'a-t-il pas rencontré les trois systèmes de géométrie par une voie très simple, entièrement élémentaire (*) ?

Ce que Saccheri a fait, en ne recourant qu'aux premières propositions du livre I des *Éléments*, l'auteur des *Éléments* a pu sans doute le faire aussi. On ne peut donc pas affirmer avec certitude qu'Euclide n'ait pas connu les trois systèmes de géométrie, ou au moins qu'il n'ait été conduit, comme Saccheri, à examiner à fond la question des postulats nécessaires et suffisants pour établir la géométrie usuelle.

Mais on n'est pas forcé d'aller jusque-là pour lui attribuer les postulats 4, 5, 6. Pour le postulat 5, personne ne doute qu'il n'ait dû essayer de l'établir, comme tant de géomètres l'ont fait depuis deux mille ans, jusqu'à ce que MM. Beltrami et De Tilly aient prouvé l'inutilité de leurs efforts. Il est donc tout naturel qu'Euclide ait postulé cette proposition rebelle à toute démonstration. Pour les postulats 4 et 6, Euclide avait d'autres raisons de les énoncer en tête de ses *Éléments*. Depuis que Schiaparelli a restitué le système astronomique d'Eudoxe et que Hultsch a publié les écrits d'Autolycus, on ne doute plus que la géométrie de la sphère ne fût constituée avant Euclide. Si Euclide ne l'a

---

(*) Par la considération d'un quadrilatère plan ABCD, rectangle en B et C, et où BA = CD. Si les angles en A et D sont droits, on a la géométrie ordinaire; s'ils sont aigus, la géométrie de Lobatschewsky; s'il sont obtus, celle de Riemann. Saccheri prouve que l'on doit rejeter cette dernière, en s'appuyant sur des propositions d'Euclide, qui impliquent le postulat 6; en essayant d'exclure de même la géométrie de Lobatschewsky, il est amené à discuter les postulats 4 et 6 et d'autres propositions voisines déjà étudiées par Clavius dans sa célèbre édition d'Euclide (1589). Voir l'article suivant.

pas fait entrer dans ses *Éléments*, c'est qu'elle était en dehors du plan de son immortel ouvrage ; mais il la connaissait évidemment. Les principales propriétés des grands et des petits cercles lui étaient aussi familières qu'à nous-mêmes. Dès lors, il a dû reconnaître l'insuffisance de sa célèbre définition de la ligne droite : *ligne qui repose semblablement sur tous ses points* (ligne *homogène*, dirions-nous plus brièvement), pour caractériser cet être géométrique dans la géométrie usuelle. Cette définition, en effet, s'applique à un grand et même à un petit cercle de la sphère. Beaucoup de propriétés des grands et des petits cercles sur la sphère sont les mêmes que les propriétés de la droite dans le plan. Comment préciser la notion vague contenue dans la définition rappelée plus haut, autrement dit, comment éviter la géométrie sphérique? On ne le peut qu'au moyen des postulats 4 et 6 (ou de postulats équivalents), complémentaires de la définition de la ligne droite. Car, sur la sphère, on peut faire des angles droits inégaux (non superposables), savoir ceux dont les côtés ne sont pas des arcs de cercles égaux ; de plus, deux grands cercles se coupent toujours en deux points et comprennent un espace. En admettant les postulats 4 et 6, Euclide exclut toute confusion de la géométrie plane avec la géométrie sphérique, et en y réunissant le postulat 5, il a un système de postulats nécessaires et suffisants pour établir la géométrie usuelle (*).

7. *Conclusions.* 1° Les meilleurs manuscrits des *Éléments* d'Euclide contiennent les six postulats et huit des neuf axiomes; l'axiome 5, qui manque seul dans B et F, se trouve dans P et dans V.

2° Tout le monde admet que les trois postulats de construction sont dignes d'Euclide et peuvent lui être attribués.

3° Selon nous, il en est de même des trois autres dont la géométrie non euclidienne démontre la nécessité pour établir scientifiquement la géométrie usuelle. Cette nécessité, Euclide l'a

---

(*) Au point de vue de la discussion des principes, la connaissance de la géométrie sphérique équivaut à celle de la géométrie de Riemann; l'impossibilité pratique de démontrer le postulat 5, à celle de la géométrie de Lobatschewsky.

reconnue pratiquement pour le postulat 5, parce qu'il ne pouvait le démontrer; pour 4 et 6, par la nécessité d'éviter la géométrie sphérique.

4° Les axiomes 1 à 9 forment un ensemble logique de propositions, les unes évidentes ou démontrables, les autres indémontrables ou difficiles à démontrer, mais étroitement apparentées aux premières. Euclide, esprit systématique et rigoureux, n'a pu les séparer les unes des autres, précisément à cause de leur connexion logique.

En résumé, l'étude scientifique des principes de la géométrie conduit donc à la même conclusion que les bons manuscrits : *les six postulats et les neuf axiomes peuvent être attribués à Euclide* (*).

ANALYSE DES RECHERCHES DU P. SACCHERI, S. J., SUR LE POSTULATUM D'EUCLIDE.

M. Beltrami(**) a fait connaître récemment un précurseur italien de Lobatschewsky et de Riemann, qui, près de cent ans avant le premier, a été sur la voie de la découverte des géométries non euclidiennes, le P. Saccheri, S. J. On ignore, dit-il, la date de sa naissance ; on sait seulement qu'il était de San Remo, qu'il commença à enseigner à Pavie en 1697 et qu'il est mort, le 5 octobre 1733, à Milan, où il dirigeait le collège de Brera.

L'année même de sa mort, il a publié à Milan un ouvrage qui suffit pour tirer son nom de l'oubli. Il est intitulé : *Euclides — ab omni naevo vindicatus : — sive — conatus geometricus — quo*

(*) Cette note (extraite des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889-1890, t. XIV, 2e partie, pp. 35-45) nous a été inspirée par la lecture des ouvrages du P. Saccheri et de M. Faifofer, cités plus haut.

(**) Voir la note *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski*, par E. Beltrami, dans les comptes rendus de l'Académie (royale) des *Lincei* de Rome, t. V, 1er semestre, fascicule 6, séance du 17 mars 1889, pp. 441-448. Nous devons la connaissance de cette note de M. Beltrami au R. P. Thirion, S. J., qui nous a aussi communiqué l'ouvrage même du P. Saccheri.

stabiliuntur — Prima ipsa universae Geometriae Principia. — Auctore — Hieronymo Saccherio — Societatis Jesu — in Ticinensi Universitate Matheseos Professore. — Opusculum ex^mo. Senatui — Mediolanensi — Ab Auctore Dicatum — Mediolani, MDCCXXXIII. — Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu. L'ouvrage est un in-quarto de XVI-142 pages, avec 6 planches contenant 55 figures.

Dans la dédicace au Sénat de Milan (pp. III-V), l'auteur fait observer qu'il est extrêmement utile d'établir sur des bases absolument sûres les principes de toute science. On l'a tenté depuis longtemps pour la géométrie, mais il reste cependant quelque chose à faire. Dans son ouvrage, l'auteur a essayé de compléter les travaux de ses devanciers, et il l'offre au Sénat comme la Néostatique publiée par lui antérieurement. Viennent ensuite (p. VII) l'approbation du Provincial de la Compagnie de Jésus, datée du 16 août 1733, puis (p. VIII) celles de l'Inquisiteur général, de l'Archevêque et du Sénat de Milan, du 13 juillet 1733.

Dans sa préface (pp. IX-XI), le P. Saccheri, après avoir exprimé toute son admiration pour Euclide, observe que, cependant, il y a trois taches dans ses Éléments : la première est relative au célèbre postulatum de la théorie des parallèles, la deuxième à la définition 6 du livre V, la troisième à la définition 5 du livre VI. Le but de son travail est de faire disparaître ces trois défauts. Les pages XII-XV en contiennent ensuite une analyse détaillée, et la page XVI quelques errata.

L'ouvrage du P. Saccheri est divisé en deux livres et chacun en deux parties. Le premier livre (pp. 1-101, avec appendice, pp. 139-142; 5 pl. avec 48 fig.) est consacré tout entier au postulatum d'Euclide et contient trente-neuf propositions avec corollaires, lemmes et remarques. Le second livre traite, dans la première partie, de la définition 6 du livre V d'Euclide, et incidemment de la proposition 2 du livre XII; dans la seconde, de la définition 5 du livre VI.

L'auteur croit, *à priori*, à la vérité du postulatum d'Euclide, mais, selon lui, il n'aurait pas dû être appelé axiome (comme il

l'est dans l'édition d'Euclide, de Clavius, dont il se sert), et il aurait fallu le démontrer. C'est en cherchant à l'établir rigoureusement qu'il expose, sous une forme très nette, les premiers principes de la géométrie non euclidienne.

Nous allons faire connaître la suite des propositions de l'auteur, en supprimant, pour abréger, les démonstrations. L'auteur ne suppose connues du lecteur que les propositions 1-26 du livre I des Éléments d'Euclide, c'est-à-dire ce qui précède la théorie des parallèles. Son but est de démontrer le 5e postulat d'Euclide (13e axiome de l'édition de Clavius) : *Deux droites coupées par une troisième et faisant avec celle-ci des angles intérieurs d'un même côté, dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent de ce côté.*

Première partie. I. Dans un quadrilatère ABDC, rectangle en A et B et à côtés opposés AC, BD égaux, les angles en C et D sont égaux.

II. La médiane MH, qui divise en deux parties égales les côtés AB, CD de ce quadrilatère birectangle isoscèle ABDC, est perpendiculaire à AB et à CD.

III-IV. Selon que les angles en C et en D, dans le quadrilatère isoscèle ABDC, sont droits, aigus ou obtus, on a CD = AB, CD > AB, ou CD < AB, et réciproquement.

Corollaires 1-2. Si le quatrième angle d'un quadrilatère trirectangle est obtus, les côtés adjacents à l'angle obtus sont plus petits que les côtés opposés; si le quatrième angle est aigu, les côtés adjacents à cet angle sont plus grands que les côtés opposés et, *a fortiori*, qu'une partie de ceux-ci.

3. Tout ce qui précède et tout ce qui suit est vrai si AC et BD sont infiniment petits.

Définitions. Il y a trois hypothèses à distinguer, suivant la nature des angles C et D, dans la proposition I : *l'hypothèse de l'angle droit*, celle *de l'angle obtus* et celle *de l'angle aigu*.

Notes. 1. Ces hypothèses correspondent respectivement à la géométrie euclidienne, à la géométrie de Riemann et à celle de Lobatschewsky.

2. Dès la proposition III, l'auteur se sert de la proposition (Euclide, I,

16) : *Le supplément d'un angle quelconque d'un triangle est plus grand que chacun des deux autres.* La démonstration de ce théorème s'appuie implicitement sur le postulat 6 d'Euclide : *Deux droites ne peuvent contenir un espace* (ou deux droites ne peuvent avoir deux points communs sans coïncider). Ce postulat et la proposition I, 16 ne sont pas toujours vrais dans la géométrie de Riemann ou dans l'hypothèse de l'angle obtus. Il est donc tout naturel que, dans la suite, Saccheri parvienne à prouver l'incompatibilité de cette hypothèse avec les propositions admises par lui.

3. Saccheri, comme on le verra plus bas, a une idée fausse des infiniment petits. Par ce terme, il entend les pseudo-infiniment petits de Jean Bernouilli, c'est-à-dire *de soi-disant quantités fixes différentes de zéro et qui sont néanmoins plus petites que toute quantité donnée.* C'est cette notion contradictoire qui l'a conduit aux erreurs qui déparent son beau livre et l'a empêché de faire la découverte de la géométrie de Lobatschewsky, dont il possédait les éléments.

V. Si l'hypothèse de l'angle droit est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

VI. Si l'hypothèse de l'angle obtus est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

VII. Si l'hypothèse de l'angle aigu est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

4. La démonstration de la proposition VI n'est pas absolument rigoureuse dans Saccheri ; mais elle peut être rendue telle, en prouvant que, dans le quadrilatère de la proposition I, CD diffère aussi peu que l'on veut de AB, si AC, BD sont suffisamment petits et observant qu'une grandeur continue passe par toutes les valeurs intermédiaires entre deux de ses valeurs effectives. La proposition VII est une suite de V et VI.

VIII-IX. Dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus est égale, supérieure ou inférieure à un droit, suivant qu'est vraie l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus, ou celle de l'angle aigu.

X. De deux obliques, celle-là s'éloigne le plus du pied de la perpendiculaire, qui est la plus longue, et réciproquement.

XI-XII. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans celle de l'angle obtus, une perpendiculaire et une oblique à une même droite se rencontrent.

XIII. Dans ces deux hypothèses, le postulatum d'Euclide est

vrai; autrement dit, deux droites qui font avec une troisième, d'un côté, des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits se rencontrent de ce côté.

Remarques. 1. Même si XI-XII étaient prouvés dans l'hypothèse de l'angle aigu, on ne pourrait en déduire directement XIII au moyen de VIII-IX, comme nous le faisons ici dans les deux autres hypothèses; mais on le pourrait d'une manière indirecte.

2. On peut toujours mener deux droites faisant avec une troisième des angles donnés dont la somme est inférieure à deux droits et qui se rencontrent, pourvu que la distance des sommets des angles ne soit pas donnée.

XIV. L'hypothèse de l'angle obtus se détruit elle-même. Car, si elle est vraie, le postulatum d'Euclide est vrai, comme on vient de le voir; on peut donc établir la théorie des parallèles comme Euclide, puis prouver, dans I, que les angles en C et D sont droits.

Autre démonstration.

5. Cette seconde démonstration repose sur EUCLIDE I, 16, comme nous l'avons fait observer pour III dans la note 2.

XV-XVI. Suivant que la somme des trois (quatre) angles d'un triangle (quadrilatère) est égale, supérieure ou inférieure à deux (quatre) droits, c'est l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu qui est vraie.

XVII. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, on peut trouver une perpendiculaire et une oblique à une même droite qui ne se rencontrent pas. Deux procédés : 1° ABH étant un triangle rectangle en A, on mène HD tel que l'angle BHD = HBA, puis BD perpendiculaire à HD. Les triangles AHB, DHB sont égaux, BD est une oblique par rapport à AB, qui ne rencontre pas AH; 2° soit AHMB un quadrilatère trirectangle (en A, B, H). La ligne HA ne rencontre pas BD, perpendiculaire à HM, oblique à AB.

Remarque. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite si XVII n'était pas vrai, ou si, comme on le verra (XXVII), on savait

qu'une oblique, sous un angle aigu donné, rencontre toujours la perpendiculaire.

XVIII. L'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu est vraie selon que l'angle B d'un triangle ABC, inscrit dans une circonférence de diamètre BC, est égal, supérieur ou inférieur à un angle droit.

XIX. Si l'on prolonge l'hypoténuse d'un triangle rectangle d'une longueur égale à elle-même et que l'on projette ce prolongement sur le prolongement du côté non adjacent du triangle, l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu sera vraie selon que la projection sera égale, supérieure ou inférieure à ce côté.

XX. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si B est au milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle AMC et si BD est perpendiculaire à AC, alors BD est égal ou inférieur à la moitié de MC.

XXI. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans celle de l'angle aigu, la distance d'un point qui s'éloigne indéfiniment sur un côté d'un angle, à l'autre côté, croît indéfiniment.

Corollaire. Il en est donc toujours ainsi, puisque l'hypothèse de l'angle obtus est rejetée.

6. Une fois arrivé ici, l'auteur, qui a démontré les vingt et une propositions précédentes dans les pages 1-29, consacre les pages 29-43 à une étude historico-critique en quatre remarques sur des essais de Proclus, Borelli, Nassareddin, Wallis et à diverses considérations relatives au postulatum d'Euclide et aux preuves physiques que l'on peut en donner. Voici un aperçu de cette partie de son ouvrage :

Remarques. 1. Proclus a essayé de prouver la proposition XXI. Il a réussi à démontrer seulement qu'un point du côté d'un angle est de plus en plus éloigné de l'autre côté de l'angle, quand il s'éloigne du sommet; mais il n'a pas prouvé que la distance croît au delà de toute limite. Eût-il démontré d'ailleurs la proposition XXI complète, le postulatum ne s'ensuit pas immédiatement; pour que le postulatum en fût une conséquence immédiate, il faudrait avoir établi préalablement que deux perpendiculaires à une même droite n'ont pas leurs points de plus

en plus éloignés les uns des autres lorsqu'on les prend à des distances de plus en plus grandes de la perpendiculaire commune.

2. Borelli critique à tort la définition des parallèles d'Euclide; cette définition est irréprochable, parce que Euclide donne le moyen de construire deux parallèles sans s'appuyer sur le postulatum. Borelli définit la parallèle à une droite en disant que c'est la ligne équidistante de la première; cette équidistante (déjà considérée auparavant par Clavius) est une droite, d'après la définition d'Euclide, car elle est située semblablement par rapport à tous ses points. Mais il y a une confusion dans ce dernier raisonnement : l'équidistante est située semblablement par rapport à la droite primitive, mais on ne sait pas si elle jouit de cette propriété par rapport à elle-même.

Voici divers moyens de vérifier physiquement si le postulatum est vrai : 1° Si, dans le quadrilatère birectangle isoscèle ABDC, de la proposition I, la perpendiculaire MN abaissée du point N de CD sur AB est égale à AC et à BD, c'est l'hypothèse de l'angle droit qui est vraie; 2° il en est de même si l'angle inscrit dans une demi-circonférence est droit; 3° ou si l'on peut inscrire dans une demi-circonférence la moitié d'un hexagone ayant ses côtés égaux au rayon.

3. Nassareddin fait deux postulats : 1° si les perpendiculaires abaissées d'une droite sur une autre font, d'un même côté, des angles aigus avec la première, ces perpendiculaires sont toujours de plus en plus courtes du côté des angles aigus, de plus en plus longues de l'autre côté. Cette proposition n'est pas un postulat, on peut la démontrer par le corollaire 2 de la proposition III; 2° réciproquement, si les perpendiculaires sont de plus en plus courtes d'un côté, les angles des perpendiculaires à l'une des droites, avec l'autre, sont aigus de ce côté. On peut objecter que ces angles aigus peuvent croître jusqu'à devenir droits, ce qui renverse toute la démonstration de l'auteur arabe. Ensuite, comme l'a remarqué Wallis, il aurait pu tout aussi bien admettre directement que les deux droites convergentes de son second

postulat se rencontrent, car nous prouverons (XXV) que si les perpendiculaires décroissantes avaient une limite différente de zéro, l'hypothèse de l'angle aigu peut être démontrée fausse.

Wallis déduit le postulatum de l'existence, admise *à priori*, de deux figures semblables, deux triangles, par exemple, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels. Mais il n'y a pas besoin d'admettre autant; il est facile d'établir la vérité de l'hypothèse de l'angle droit, s'il existe deux triangles inégaux équiangles, sans qu'on doive s'inquiéter de la proportionnalité des côtés.

4. Euclide a pu arriver à se convaincre de la vérité du postulatum par la considération de la figure suivante : On peut construire un triangle ABC ayant deux angles donnés A, B, pourvu que leur somme soit inférieure à deux droits. Prolongeons indéfiniment AC, BC, et, en laissant l'angle B constant, faisons mouvoir BC de manière que B s'éloigne indéfiniment de A. Il est clair que le postulatum serait démontré, si BC rencontrait toujours AC, quelque éloigné de A que fût B, ou si l'angle ABC n'avait pas zéro pour limite. Si cet angle devenait nul, AC et BC, à ce moment, auraient un prolongement unique, ce qui serait absurde (voir Prop. XXXIII). Cet angle ne pouvant devenir nul, AC sera toujours rencontré par BC. Or, si cela a lieu pour un angle A aussi petit qu'on le veut, on peut établir le postulatum (XXVII).

7. On observera ici que Saccheri suppose que si ACB a pour limite zéro, cela signifie qu'il y a un point C où cet angle est nul. C'est, au fond, l'erreur déjà signalée dans la note 3.

XXII. Si un quadrilatère ABDC est birectangle en A et B, et si les angles en C et D sont aigus, on peut mener entre AC et BD une droite MN perpendiculaire à la fois à AB et à CD.

8. Dans sa démonstration, Saccheri admet implicitement que certains angles variables, considérés par lui, varient d'une manière continue, ce qui, au reste, est exact et assez facile à démontrer.

XXIII. Deux droites ou bien ont une perpendiculaire commune, ou se rencontrent à une distance finie, ou enfin se rapprochent sans cesse l'une de l'autre.

Corollaires. **1. Si deux droites se rapprochent sans cesse l'une de l'autre, les perpendiculaires abaissées des points de la première sur la seconde font avec la première des angles obtus du côté des perpendiculaires les plus longues.**

Remarque. **Si la somme des angles internes, formés par les deux droites avec une sécante, est égale à deux droits, on peut abaisser du milieu de la partie de la sécante interceptée entre les deux droites une perpendiculaire commune.**

2. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, quand il existe une perpendiculaire commune, les deux droites, d'après III, corollaire 1, s'éloignent sans cesse l'une de l'autre.

9. Ce corollaire 2 est identique, au fond, avec EUCLIDE, I, 27 et 28. Saccheri croit devoir le démontrer, parce que la démonstration d'Euclide s'appuie sur I, 16 : *Dans un triangle, le supplément d'un angle est plus grand que chacun des deux autres.* Or, dans le cas actuel, dit Saccheri, on pourrait objecter que les deux perpendiculaires à une même droite se rencontrent à l'infini, et l'on ne sait pas si I, 16 s'appliquerait à un triangle ayant un côté fini et les deux autres infinis. Comme on le voit, Saccheri accorde une existence réelle aux pseudo-infiniment grands, c'est-à-dire *à de soi-disant quantités déterminées plus grandes que toute quantité donnée.*

XXIV. Deux droites quelconques AX, BY étant données, la seconde BY, perpendiculaire à AB, à A′B′, A″B″, A‴B‴, A′, A″, A‴ étant sur AX à des distances croissantes de A et B′B″ étant égal à B″B‴, la somme des angles du quadrilatère A′B′B″A″ est inférieure à celle des angles du quadrilatère A″B″B‴A‴, si l'on a A′B′ > A″B″ > A‴B‴, soit que ces droites AX, BY se rencontrent ou non.

Corollaire. **Ce théorème serait vrai, même si A‴B‴ était une perpendiculaire commune.**

Remarque. **Dans le cas où les deux droites AX, BY se rapprochent sans cesse, toute perpendiculaire à BY en un point K, au delà de B, du côté où les droites se rapprochent, rencontre AX.**

XXV. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si deux droites se rapprochent sans cesse, elles se rapprochent indéfiniment, autrement dit, l'une est asymptote de l'autre.

Corollaires. 1. La proposition précédente a été annoncée dans la remarque 3, après la proposition XXI.

2. On ne peut pas établir la *géométrie euclidienne* en appelant parallèles deux droites perpendiculaires à une même troisième et concluant de cette définition que deux droites faisant avec une troisième des angles dont la somme est inférieure à deux droits se rencontrent à une distance finie ou infinie; car il faudrait démontrer préalablement que ces droites n'ont nulle part de perpendiculaire commune.

XXVI. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si AX est oblique à AB et asymptote à BY, perpendiculaire à AB, toute perpendiculaire à AB, entre A et B, rencontrera AX.

Corollaires. 1. Toute perpendiculaire à AB, en un point situé au delà de B, ne rencontre pas AX, même à l'infini.

2. Une perpendiculaire à AB, en un point suffisamment proche de A, rencontre AX.

3. AX, asymptote de BY, ne peut couper BY; car, si cela arrivait, d'un point de AX, au delà de l'intersection, on pourrait abaisser une perpendiculaire sur AB; le point d'intersection serait au delà de B, et, par suite, on pourrait prouver que BY rencontre AX à une distance finie.

10. Ce corollaire, inutile d'après l'auteur lui-même, repose de nouveau sur l'idée fausse que l'auteur se fait de l'infini.

XXVII. Si une oblique AX à AB, pour un angle BAX suffisamment petit, rencontre, à une distance finie ou infinie, toutes les perpendiculaires BY à AB, quelque grande que soit la distance AB, on peut établir la fausseté de l'hypothèse de l'angle aigu.

Remarques. 1. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite, si l'on pouvait établir que deux droites AX, BY, qui font avec une troisième des angles internes d'un même côté, ayant une

somme inférieure à deux droits, n'ont pas de perpendiculaire commune, quelle que soit la distance AB.

2. Nous avons annoncé le théorème XXVII dans la remarque 4, après XXI.

3. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite aussi, comme on l'a vu (XVII), si, pour tout angle aigu XAB, AX rencontrait BY pour une seule distance AB, si petite qu'elle fût.

XXVIII. Si AX est oblique à AB et asymptote à BY, perpendiculaire à AB, et si XY est perpendiculaire à BY, l'angle AXY est obtus, décroît quand AX croît et a pour limite un angle droit.

Corollaire. AX et BY tendent à avoir une perpendiculaire commune en un point commun à l'infini.

XXIX. Toute droite AC, menée dans l'angle XAB aigu, rencontre la perpendiculaire BY à AB, si AX est asymptote de BY, en un point T, à une distance finie.

Corollaires. 1. Si ZAB est un angle non obtus, supérieur à XAB, AZ n'est pas asymptote de BY.

2. Si T est un point de la perpendiculaire BY à AB, l'angle TAB, quand TB croît indéfiniment, n'a pas de valeur maxima, mais tend vers la limite inaccessible XAB.

XXX. Il n'y a pas de dernière oblique AY à AB ayant avec BY, perpendiculaire à AB, une perpendiculaire commune.

Corollaire. La perpendiculaire commune, quand elle existe pour une oblique AX et une perpendiculaire BY à AB, est d'autant plus petite que l'angle XAB est plus petit.

XXXI. Cette perpendiculaire commune a pour limite zéro, quand l'angle XAB décroît.

XXXII. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, il existe un angle XAB, tel que AX ne rencontre pas BY perpendiculaire à AB; toute oblique comprise dans l'angle XAB rencontre BY; toute oblique faisant un angle aigu plus grand que XAB avec AB a, avec BY, une perpendiculaire commune, à une distance finie.

XXXIII. L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse.

Car, si elle était vraie, l'oblique AX à AB, asymptote à la perpendiculaire BY à AB, aurait à l'infini, avec celle-ci, une perpendiculaire commune, en un point commun, ce qui est contraire à la nature de la ligne droite, comme nous allons le montrer.

11. L'auteur, comme on le voit, s'appuie ici sur la fausse notion de l'infini que nous avons déjà signalée. Les propositions XXII à XXXII, où il étudie avec tant de rigueur l'hypothèse de l'angle aigu, sont exposées pp. 43-70. La proposition XXXIII tient en quatorze lignes, mais l'auteur la fait suivre, pp. 70-85, de cinq lemmes sur les premiers principes de la géométrie; puis, à la page 86, il revient sur sa démonstration de la proposition XXXIII.

Lemme 1. Deux droites ne comprennent pas un espace. Car une droite doit rester immobile quand on la fait tourner autour de deux de ses points comme sur des pivots.

Corollaire 1. Il existe une ligne droite entre deux points fixes, savoir le lieu des points immobiles compris entre deux positions d'une ligne passant par les deux points fixes et que l'on fait pivoter sur ces points fixes.

2. Il existe un plan tel que le définit Euclide.

Lemme 2. Deux droites ne peuvent avoir un segment commun (pp. 73-81).

Corollaire. Deux droites, même infiniment voisines, ne peuvent enclore un espace. Une droite ne peut se bifurquer, même en deux segments infiniment voisins. Du lemme 2 on peut déduire la proposition 4 du livre XI d'Euclide.

Lemme 3. Deux droites qui ont un point commun ne se touchent pas, mais se coupent.

Lemme 4. Tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales.

Remarque. Clavius dit que Thalès a démontré cette proposition; mais il ne l'a peut-être pas fait avec rigueur.

Lemme 5. Tous les angles droits rectilignes sont égaux et ne diffèrent pas même infiniment peu.

Corollaire. La perpendiculaire à une droite, en un point, est absolument unique.

Conséquence des cinq lemmes. La démonstration de la proposition XXXIII suit évidemment des lemmes précédents avec leurs corollaires.

Remarque. Nous allons montrer autrement que l'hypothèse de l'angle aigu est fausse.

12. Malgré le vague et l'insuffisance des raisonnements de Saccheri dans les démonstrations des lemmes cités plus haut, malgré ses fausses idées sur l'infini, on observera néanmoins qu'il a bien reconnu que les propositions énoncées lemmes 1 (postulat 6 d'Euclide) et 5 (postulat 4 d'Euclide) ne sont pas de vrais axiomes.

DEUXIÈME PARTIE. XXXIV. L'équidistante d'une droite, dans l'hypothèse de l'angle aigu, est située au-dessus de ses cordes; autrement dit, la corde est située entre la droite et l'équidistante.

XXXV. Elle est en dessous de toute perpendiculaire, en l'un de ses points, à une de ses ordonnées; autrement dit, l'équidistante est située entre la droite et la perpendiculaire.

XXXVI. Cette perpendiculaire lui est tangente; c'est-à-dire que toute droite qui fait un angle aigu avec l'ordonnée de l'équidistante, en un point de celle-ci, la coupe en un second point.

XXXVII. L'équidistante est égale à sa base. Car on peut la diviser en 2^n parties égales, dont chacune, pour $n = \infty$, est infiniment petite, par suite, égale à la tangente qui se confond avec la courbe, *et à la partie correspondante de la base.*

Remarques 1-2. Essai de démonstration de la partie du raisonnement imprimée en italiques.

13. Voici le texte de l'absurde raisonnement résumé dans les mots que nous venons de souligner (KM est une ordonnée de l'équidistante, perpendiculaire à AB en M) : « Infinitesima K, spectans ad curvam, aequalis omnino erit infinitesimae K spectanti ad tangentem. Constat autem infinitesimam K, spectantem ad tangentem, nec majorem, nec minorem, sed omnino aequalem esse infinitesimae M spectanti ad basim AB; quia nempe recta illa MK intelligi potest descripta ex fluxu semper ex aequo ejusdem puncti M usque ad eam summitatem K (p. 92). » Par *infinitesima*, l'auteur entend les points (*punctis, seu mavis infinitesimis*, p. 94). Dans la remarque 1, il dit : *Inde fit ut punctum* M *in ea* BA *censendum sit exactissime aequale puncto* K ! Comment Saccheri n'a-t-il pas vu que ce raisonnement, appliqué à deux circonférences concentriques, permettrait de prouver qu'elles ont des longueurs égales ?

XXXVIII. L'hypothèse de l'angle aigu est fausse. Car, si elle était vraie, l'équidistante, qui a une longueur supérieure à celle de sa corde et, par suite, de sa base, projection de sa corde, devrait aussi être égale à cette base, d'après XXXVII.

Remarque. Dans l'hypothèse de l'angle obtus, l'équidistante aurait sa convexité tournée vers sa base, qui serait plus grande que sa corde. On ne pourrait donc pas faire le raisonnement qui sert à prouver XXXVIII.

XXXIX. Le postulatum d'Euclide est prouvé, comme conséquence de XIII, par le fait de l'exclusion des deux hypothèses de l'angle obtus (XIV) et de l'angle aigu (XXXIII, XXXVIII); la première, par réduction à l'absurde, la seconde, par la nature de la ligne droite et par réduction à l'absurde.

Remarque. L'auteur termine par diverses réflexions sur la marche suivie dans son livre et avoue que sa réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu n'est pas parfaite : « Circa hypothesin anguli obtusi res est meridiana luce clarior... Contra vero non devenio ad probandam falsitatem alterius hypothesis, quae est anguli acuti, nisi prius demonstrando quod linea, cujus omnia puncta aequidistent a quadam supposita recta linea in eodem cum ipsa plano existente, aequalis sit ipsi tali rectae; *quod ipsum tamen non videor demonstrare ex visceribus ipsiusmet hypothesis, prout opus foret ad perfectam redargutionem* » (p. 98).

Appendice. On ne peut mesurer les figures, même rectilignes, sans le secours du postulatum, parce que, sans cette proposition, on ne peut subdiviser les rectangles en carrés égaux.

Conclusion. Le livre du P. Saccheri est écrit avec une rigueur vraiment euclidienne, sauf dans les passages où interviennent ses fausses idées sur l'infini et les infiniment petits. Si l'auteur avait étudié Archimède et Newton avec le même soin que les Éléments d'Euclide, il y aurait appris à manier avec précision et sûreté ces expressions conventionnelles de la langue mathématique, et probablement il serait arrivé, un siècle avant Lobatschewsky et Bolyai, à cette conclusion : On peut édifier un système de géométrie parfaitement rigoureux, différent de celui

d'Euclide. Peut-être même aurait-il découvert la géométrie riemannienne, puisque son livre contient quelques propositions qui s'y rapportent, à côté de beaucoup d'autres qui appartiennent à la géométrie de Lobatschewsky.

Mais, malgré ses défauts, l'*Euclides ab omni naevo vindicatus* est l'ouvrage le plus remarquable que l'on ait écrit sur les Éléments avant Lobatschewsky et Bolyai. Il est probable qu'il n'a pas été sans influence sur le développement de la science. Il n'est pas resté inconnu; il a été l'objet d'un compte rendu (superficiel, il est vrai) en 1736, dans les *Acta Eruditorum*. Il se trouvait probablement à la bibliothèque de Göttingen vers 1800, car il est marqué d'un astérisque dans la *Bibliotheca mathematica* de Murhard; dans cet ouvrage il est signalé (t. II, p. 43) parmi les écrits consacrés à l'explication, à la critique ou à la défense d'Euclide (*Einleitungs- und Erläuterungsschriften, auch Angriffe und Vertheidigungen des Euklides*). Il a donc eu quelque notoriété, et l'on peut conjecturer qu'il n'a échappé ni à Gauss, ni aux autres géomètres qui se sont occupés, dans la première moitié de ce siècle, des principes fondamentaux de la géométrie. Quoi qu'il en soit, le P. Saccheri est, chronologiquement, le premier qui ait écrit une vraie étude critique sur le postulatum, et il doit être regardé comme le précurseur des géomètres non euclidiens modernes (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889-1890, t. XIV, 2e partie, pp. 46-59).

RELATION ENTRE LES DISTANCES DE CINQ POINTS EN GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

1. Tout système de géométrie à trois dimensions, comme l'a fait observer M. De Tilly (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. XIV, p. 1015, lignes 21 à 25), est caractérisé par une relation de forme non arbitraire (voir n° 5), existant entre les mesures des distances mutuelles d_{ik} de cinq points quelconques.

2. En rendant rigoureux les raisonnements de Legendre exposés dans la note deuxième de ses *Éléments de Géométrie*, on peut établir la proposition suivante :

La relation entre les distances de cinq points qui caractérise un système de géométrie non euclidienne existe entre les rapports des distances de ces points à une distance Δ spéciale à ce système ; la relation qui caractérise la géométrie euclidienne, au contraire, ne contient que les dix distances des cinq points considérés et subsiste quand on multiplie chacune des distances par un nombre quelconque.

Cette proposition est identique à la remarque suivante de Gauss : « Dans la géométrie euclidienne, rien n'est grand d'une manière absolue ; mais il n'en est pas de même dans la géométrie non euclidienne, et c'est là précisément son caractère essentiel. Ceux qui n'accordent pas ce fait établissent déjà par cela même toute la géométrie euclidienne. » (Lettre à Schumacher du 12 juillet 1831, p. 40 de la traduction, par Houel, des *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, de Lobatschewsky.)

3. La relation euclidienne entre les distances de cinq points, trouvée par Lagrange et mise par Cayley sous la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ 1 & d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

devient, par un calcul semblable à celui de Cayley,

$$| 1, \quad y, \quad z, \quad t, \quad u |^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

si l'on pose

$$d_{ik}^2 = (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 + (t_i - t_k)^2 + (u_i - u_k)^2.$$

4. La relation non euclidienne analogue est

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & (15) \\ (12) & (22) & (23) & (24) & (25) \\ (13) & (23) & (33) & (34) & (35) \\ (14) & (24) & (34) & (44) & (45) \\ (15) & (25) & (35) & (45) & (55) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où $(ik) = \cos\left(\frac{d_{ik}}{\Delta}\right)$, ou $\mathrm{Ch}\left(\frac{d_{ik}}{\Delta}\right)$, Δ étant la quantité caractéristique dont il est question plus haut. En posant

$$(ik) = X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k + T_i T_k + U_i U_k,$$

la relation non euclidienne prend la forme

$$| X, Y, Z, T, U |^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

En faisant $\Delta = \infty$ dans la relation (2), on peut en déduire la relation (1).

Si, dans les déterminants (1'), (2'), on suppose nulles toutes les coordonnées situées au-dessus de la diagonale, on trouve que les éléments restants du déterminant (2') ont pour limite les éléments restants du déterminant (1'), quand $\Delta = \infty$.

5. *Théorème des six points.* Si l'on écrit en abrégé la relation (1') ou la relation (2') sous la forme (12345) = 0, on prouve aisément, au moyen de la remarque qui termine le n° 4, que les relations

$$(12345) = 0, \quad (12346) = 0, \quad (12356) = 0$$

ont pour conséquences

$$(23456) = 0, \quad (13456) = 0, \quad (12456) = 0.$$

Les relations (1) et (2), comme nous l'a fait observer M. De

Tilly, ne pourraient servir à caractériser les propriétés d'un espace homogène, si elles ne jouissaient pas de la propriété exprimée dans ce théorème, dit *théorème des six points.*

6. La relation non euclidienne peut se mettre sous la forme suivante :

$$(\sin\delta_{12}\sin\delta_{13}\sin\delta_{14}\sin\delta_{15}\sin\delta'_{23}\sin\delta'_{24}\sin\delta'_{25}\sin\delta''_{34}\sin\delta''_{35}\sin\delta'''_{45})^2 = 0,$$

et la relation euclidienne sous une forme équivalente.

On pose $\Delta\delta_{ik} = d_{ik}$ (si la relation contient des cosinus circulaires), $\Delta\sqrt{-1}\delta_{ik} = d_{ik}$ (si la relation contient des cosinus hyperboliques), puis

$$(23) - (12)(13) = \sin\delta_{12}\sin\delta_{13}\cos\delta'_{23},$$
$$(24) - (12)(14) = \sin\delta_{12}\sin\delta_{14}\cos\delta'_{24},$$
$$(25) - (12)(15) = \sin\delta_{12}\sin\delta_{15}\cos\delta'_{25},$$
$$(34) - (13)(14) = \sin\delta_{13}\sin\delta_{14}\cos\delta''_{34},$$
$$(35) - (15)(15) = \sin\delta_{15}\sin\delta_{15}\cos\delta''_{35},$$
$$(45) - (14)(15) = \sin\delta_{14}\sin\delta_{15}\cos\delta'''_{45},$$

$$\cos\delta'_{34} - \cos\delta'_{23}\cos\delta'_{24} = \sin\delta'_{23}\sin\delta'_{24}\cos\delta''_{34},$$
$$\cos\delta'_{35} - \cos\delta'_{23}\cos\delta'_{25} = \sin\delta'_{23}\sin\delta'_{25}\cos\delta''_{35},$$
$$\cos\delta''_{45} - \cos\delta'_{24}\cos\delta'_{25} = \sin\delta'_{24}\sin\delta'_{25}\cos\delta''_{45},$$
$$\cos\delta''_{45} - \cos\delta'_{34}\cos\delta''_{35} = \sin\delta''_{34}\sin\delta''_{35}\cos\delta'''_{45}.$$

(Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1890-1891, t. XV, première partie, pp. 8-11.)

UN

ASTRONOME BELGE DU XVII^e^ SIÈCLE

GODEFROID WENDELIN (1);

PAR M. C. LE PAIGE,

Professeur à l'Université de Liège, membre de l'Académie royale de Belgique.

Il y a plusieurs années déjà, lorsque j'ai essayé de reprendre l'œuvre commencée par le savant et regretté Adolphe Quetelet, et de retracer la vie des mathématiciens qui ont illustré la Belgique, j'ai rencontré quelques figures qui m'ont séduit d'abord. Ailleurs, j'ai tâché de faire revivre l'un de nos plus grands géomètres : René-François de Sluse; aujourd'hui, je voudrais faire le portrait d'un homme que son pays natal a trop oublié : Godefroid Wendelin.

C'est une figure sympathique entre toutes que celle de cet aventureux astronome que son humeur inquiète conduit à travers l'Europe et qui, dans les situations les plus diverses, parfois les plus difficiles, ne cesse de poursuivre une idée, de ce savant que nous rencontrons, à l'aurore de la vie, poussé par un secret instinct vers les observations célestes, et que nous retrouvons, au déclin de ses jours, à plus de quatre-vingts ans, fidèle aux premières passions de sa jeunesse.

C'est en outre un type complexe, moins rare au XVII^e^ siècle qu'aujourd'hui, un savant pour qui les champs des cieux ne sont pas assez larges encore.

Entraîné par l'amour des vieilles gloires de la terre fla-

---

(1) Discours prononcé dans la séance publique de la Classe des sciences, le 16 décembre 1890. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3^e^ sér., t. XX, n^o^ 12, pp. 709-727, 1890.

mande, il s'essaye à expliquer l'origine et les difficultés de la loi salique en mettant au service de ses recherches sa profonde connaissance de la langue thioise et toute l'ingéniosité d'un esprit aiguisé par des observations multiples dans le vaste domaine de la nature; c'est encore un charmant écrivain qui peut rivaliser, dans l'épigramme latine, avec un maître, Constantin Huygens, et lutter, dans un tournoi de *concetti*, avec les poètes provençaux.

Son imagination ardente le pousse à scruter les époques les plus lointaines, les plus ténébreuses de l'histoire : émule du grand Newton, il ne craint pas de s'aventurer, comme lui, dans les forêts mystérieuses de la chronologie.

Il ne me serait guère possible, aujourd'hui, de suivre notre savant sur les routes diverses qu'il a parcourues : il me suffira de parler de l'homme et d'exposer ses recherches astronomiques, heureux si je ne suis pas trop au-dessous de la tâche que j'ai assumée, même en la circonscrivant de la sorte.

Godefroid Wendelin naquit à Herck, une des bonnes villes de l'ancien pays de Liège, le 6 juin 1580, aux limites de ce XVI^e^ siècle qui vit remuer tant d'idées, s'accumuler tant de travaux, tant de recherches.

Toute sa vie, il semble porter la marque de cette époque avide de retrouver les richesses de l'antiquité tout à coup dévoilée, accumulant des trésors que les âges futurs devaient mettre en œuvre. Il a gardé, du XVI^e^ siècle, la soif inextinguible du savoir, le besoin de tout scruter, l'infatigable ardeur au travail ; mais ces qualités, il les joindra à celles qu'apporte avec lui un siècle nouveau, et il ne sera pas indigne d'être le contemporain de Huygens, de Gassendi, de Pascal.

La petite ville où Wendelin vit le jour possédait alors une école latine dirigée par un savant modeste, Henri Alen.

Celui-ci, avec ses fonctions de recteur, cumulait celles de secrétaire de la ville, ce qui ne l'empêchait pas, à l'occasion, de composer des vers grecs d'assez bonne tournure : on connaissait les langues savantes à cette époque. Des liens de parenté l'unissaient peut-être à notre héros, car il en fut le parrain.

C'est sous ce maître que notre compatriote fit ses premières études : dès l'abord, il s'y distingua : à treize ans, il écrivait en latin des vers iambiques qui excitèrent l'admiration.

Sans nul doute, l'étude des sciences exactes ne devait pas occuper une bien large place dans l'école de Herck, mais on se tromperait peut-être si l'on croyait qu'elle y était entièrement délaissée. L'attention de l'enfant était attirée déjà vers le spectacle des grands phénomènes célestes, au point que les circonstances d'une éclipse de lune, arrivée en 1590, ne le laissèrent pas indifférent.

L'école latine n'étant probablement pas organisée de façon à permettre au jeune Wendelin d'y terminer ses humanités, ses parents résolurent de l'envoyer à Tournai.

Le jour même de son départ pour le collège des Jésuites, le 24 avril 1595, est marqué par une éclipse de lune : les anciens auraient vu un présage dans cette coïncidence. Pour nous, bornons-nous à noter que maint événement de la vie de notre savant est caractérisé de la sorte.

Ce n'était pas mince chose, à cette époque, que de quitter la maison paternelle pour s'en aller au loin : la nuit entière, toute la famille s'occupe des préparatifs du départ; seul, Wendelin ne peut s'arracher entièrement à l'observation du phénomène qui le frappe, et il en note les phases comme il le peut.

Son séjour à Tournai ne fut pas de longue durée : trois

ans plus tard, le 21 février 1598, notre jeune humaniste suit les cours de l'université de Louvain.

Cette date, c'est Wendelin encore qui nous la conserve, car elle lui rappelle une éclipse de lune : heureux souvenir qui nous permet, comme par une échappée, de jeter un regard sur la vie laborieuse des étudiants d'alors : « L'éclipse, dit Wendelin, commença un peu après quatre heures, au moment où nous nous éveillions pour réciter nos prières et nous mettre au travail : à coup sûr, il n'était pas quatre heures et quart. »

Ne vous semble-t-il point entendre cet autre écolier, « l'ornement de son siècle », nous dit Guillaume du Val en son *Collège de France*, Henry de Mesmes, écrivant dans ses Mémoires : « Nous étions debout à quatre heures et, ayant prié Dieu, allions à cinq heures aux estudes, nos gros livres sous le bras, nos écritoires et nos chandeliers à la main »? Ceci se passait, en 1545, à l'université de Toulouse.

Ces habitudes matineuses, Wendelin les conserva dans la suite. En 1608, lorsqu'il habite Forcalquier, nous le voyons, devançant l'aurore. Un livre à la main, il s'éloigne de la cité : épris du calme de la nature, il s'en va pour jouir des senteurs de la campagne, pour goûter la fraîcheur des primes heures du jour; c'est ainsi qu'une première fois il put observer la pluie rouge.

A Louvain, Wendelin compléta surtout son éducation littéraire; il aborda l'étude de l'hébreu et s'y rendit habile.

Quant aux mathématiques, il dut retirer peu de profit des enseignements de l'*Alma Mater*.

Depuis 1593, les leçons brillantes d'Adrien Romain avaient cessé : l'émule de Viète avait été appelé à Wurtzburg, et son successeur, Jean Storms de Malines, malgré les éloges que lui décerne Valère André, ne fut jamais

qu'un pauvre versificateur dont toute l'activité se borna, pendant un demi-siècle, à mettre en soi-disant vers la physique d'Aristote, l'expression approchée du rapport de la circonférence au diamètre, ou les différentes formes du carré magique de 16.

Faut-il s'étonner que Wendelin ait voulu s'abreuver à des sources plus pures et plus abondantes ?

Cédant, pour la première fois, à ce besoin de déplacement qui l'agita toute sa vie, il résolut de se rendre à Prague. Peut-être y était-il attiré par le désir de s'attacher à Tycho-Brahé, qui résidait alors dans cette ville. Il ne lui fut pas donné d'atteindre le but de son voyage, et le pays de Liège, qui faillit, à cette époque, donner asile au grand astronome danois, n'eut pas même l'heureuse fortune de voir un de ses enfants parmi les disciples du célèbre observateur.

Parti avec un de ses amis, Wendelin fut obligé, par la maladie, de s'arrêter à Nuremberg. Ce retard forcé donna un autre cours à ses idées. Il revint à Herck, mais n'y passa qu'un instant.

Bientôt nous le voyons se diriger vers le midi.

En 1599, il est à Marseille, dont il détermine la latitude : ce fut, sans nul doute, son premier travail astronomique sérieux, et il semble se rattacher à un projet qu'il poursuivit durant de longues années.

Mais, éloigné des siens, dans un pays étranger, la vie devait lui être parfois difficile : un moment, Wendelin devint correcteur d'imprimerie; ce ne fut qu'un emploi passager.

En 1600, le désir de gagner l'indulgence du jubilé le conduit à Rome ; il parcourt l'Italie et, finalement, revient à Marseille.

La Provence allait le posséder longtemps. Il s'établit

d'abord à Digne : on ne sait au juste s'il fut régent au collège ou s'il ouvrit une école de mathématiques; mais on rapporte volontiers qu'il compta parmi ses élèves le célèbre Gassendi. Sorbière, Colomiez, et, ce qui est plus probant, Mantelius, qui semble tenir ses renseignements de Wendelin, Valère André, qui publia sa *Bibliotheca belgica* du vivant de notre astronome et de l'illustre prévôt de Digne, affirment la chose; mais le P. Bougerel, le biographe du grand adversaire de Descartes, combat ce sentiment par d'assez bonnes raisons.

De Digne, Wendelin passa à Valensole : deux années de suite il conquit dans cette ville, à la suite d'un concours public, une des chaires du collège; à la rentrée de 1604, il renonça à la lutte, non pas qu'il la craignît, mais parce qu'il avait donné suite à de nouveaux projets.

Un instant il était revenu au pays natal, mais la brumeuse Campine et ses bruyères mélancoliques ne pouvaient lutter avec le brillant soleil de la Provence, devenue une seconde patrie pour l'ardent voyageur; aussi est-ce sans étonnement que nous voyons notre compatriote regagner rapidement le midi.

Il y trouva d'ailleurs une hospitalière demeure chez André d'Arnaud, seigneur de Miravail, lieutenant général de la sénéchaussée de Forcalquier.

Ami des lettres, auteur lui-même de vers charmants, André d'Arnaud choisit Wendelin comme précepteur de ses enfants : notre savant rencontra chez lui un foyer familial; il s'y trouvait assis, non comme un hôte passager, mais comme un ami.

Lié avec Peiresc, avec Gassendi, avec cent autres, le vice-sénéchal, était, comme eux, un curieux. Il avait amassé une riche bibliothèque, où figuraient avec honneur quelques joyaux, comme ce *Codex arnaldinus*, ce manuscrit de Jean

de Linières que l'astronome belge dut feuilleter tant de fois.

Wendelin ne se borna pas, en effet, à faire l'éducation des enfants d'André d'Arnaud — l'un de ceux-ci, d'ailleurs, Scipion, était presque de l'âge du précepteur et fut pour lui plutôt un compagnon qu'un élève, — l'enseignement des langues mortes et de l'histoire n'occupait pas tout son temps. Et, au surplus, ce n'était pas avec un homme de cette trempe que les journées pouvaient limiter le travail : les nuits étaient à lui, les nuits pendant lesquelles, grâce à l'admirable transparence du ciel de la Provence, il pouvait observer quand il le voulait. Puis, nous l'avons vu, au besoin il devançait le jour.

Au reste, tout lui était sujet d'étude : si, pendant une grande partie de l'année, la famille d'Arnaud, retenue par les fonctions de son chef, habitait Forcalquier, quelques mois étaient réservés à un séjour au pied des Alpes, à Chateauneuf-Miravail. Wendelin savait y continuer, y étendre même ses travaux.

De la terrasse du château, il pouvait se livrer à ses observations aimées; en outre, le pays lui fournissait des sujets bien dignes d'exciter sa curiosité.

A quelque distance du château s'élève la montagne de Lure; Wendelin ne craint pas d'en escalader les deux mille mètres : c'est que du haut de cette pointe isolée des Alpes, il domine la Provence tout entière : au loin, la chaîne du Dauphiné et, entre les deux, la vallée merveilleuse, Miravail, le domaine de son ami et protecteur.

Souvent les brouillards enveloppent la montagne : Wendelin monte alors jusqu'à la cîme, et son enthousiasme éclate lorsque, dominant la nue, il voit au-dessus de sa tête briller le resplendissant soleil.

Mais à ses pieds, sur l'autre versant, s'étend une sorte d'abîme qu'atteint à peine la lumière du jour : dans leur langue imagée, les hommes du midi l'appellent l'Enfer. De cette sombre vallée, parfois s'élève comme la fumée d'une chaumine. Alors, malheur à celui qui ne fuit pas. Soudain le tonnerre gronde, la foudre éclate, la grêle tombe. Spectacle étrange et grandiose dans son horreur, qui, plus d'une fois, a frappé notre savant lorsque, descendant du sommet de Lure, où il était seul en face du ciel azuré, il entend tout à coup à ses pieds le roulement du tonnerre, il aperçoit, dans la triste vallée, la foudre qui brise et qui tue, il voit les ravages produits par le vent qui déracine les arbres et renverse les habitations.

A près d'un demi-siècle de distance, ce souvenir viendra l'assaillir : il semble encore avoir sous les yeux ce spectacle affreux de désolation et de mort.

Huit années s'écoulèrent ainsi, partagées entre l'enseignement et l'étude, huit années d'une vie paisible pendant lesquelles Wendelin poursuit, aidé par Scipion d'Arnaud, ses observations célestes, ne manquant pas une occasion d'augmenter son catalogue d'éclipses.

En passant, il note tous les phénomènes naturels qui le frappent, comme cette pluie rouge des premiers jours de juillet 1608, dont j'ai déjà parlé, et qui éveilla, à un si haut degré, l'attention de Peiresc; comme encore cette invasion de papillons dont les essaims nombreux obscurcissent le soleil en Grèce, en Italie, et qui, traversant les Alpes, envahissent la Provence et vont plus loin encore, jusqu'aux extrêmes frontières de l'Espagne.

Ce furent certes les heures les plus heureuses de sa vie. Comme il s'abreuve, avec délices, à cette « source bonne » que lui offre la bibliothèque de son hôte, comme il jouit des amitiés fidèles qui l'entourent !

Le souvenir des heures passées à Forcalquier ne s'effacera plus de sa mémoire : « c'est la Provence, dit-il en 1628, dans une lettre à Peiresc, qui lui a donné le premier teinct des mathématiques, et il espère qu'elle en esclorra les fruicts », car il compte toujours revoir cette seconde patrie ; il va presque, dans son affection pour elle, jusqu'à médire de la terre natale : « ne voullant pas croupir dans cet air très sombre où il ne peut jamais faire observation qui vaille » ; il n'a pas même oublié les vendanges — il écrit au mois de septembre, — et s'il exprime à Peiresc son désir « d'estancher la soif qui le presse de humer le suc de sa bibliothèque », il avoue qu'il ne dédaignerait pas de venir « gouster le vin nouveau ». Ce qu'il n'a point oublié surtout, ce sont les nombreux et fidèles amis qu'il a laissés derrière lui et, avant tous, son élève, son compagnon, Scipion d'Arnaud, celui qu'il appelle son Arnaud.

Cependant, il fallut abandonner les vallées ensoleillées de la Provence et les pics escarpées de Lure pour les plaines monotones de la Campine. Les enfants d'André d'Arnaud sont d'âge à se passer d'un précepteur ; les parents de Wendelin sont morts ; il a des intérêts à régler dans les Pays-Bas. Une dernière fois il salue la terre provençale et il part, entreprenant à pied la route immense de Forcalquier à Herck.

Peut-être est-ce à ce moment qu'il s'arrêta à Paris et qu'il y conquit le diplôme de docteur en droit. Un instant même, s'il faut en croire des biographes, il songe à s'établir dans la grande ville et à y exercer la profession d'avocat ; projet bien vite évanoui : Wendelin s'achemine de nouveau vers nos contrées.

Le 14 mai 1612 il est à Liège et, le jour même où il foule le sol natal, il lui est donné de pouvoir observer une éclipse de lune.

Son retour quelques années plus tôt eût été, peut-on croire, utile aux progrès de l'astronomie dans notre pays; le trône épiscopal de Liège était occupé alors par un prince fort épris de science, qui sut, à l'occasion, protéger Tycho-Brahé et Kepler. Il n'est pas téméraire de penser qu'Ernest de Bavière, qui entretenait deux astronomes dans son palais, qui se livrait lui-même à des travaux scientifiques, eût protégé un enfant du pays de Liège, qui revenait précédé de la réputation de savant universel.

Mais Ernest de Bavière était mort le 17 février de cette année, et il ne semble pas avoir légué ses goûts à son neveu et successeur, Ferdinand.

L'ardeur de Wendelin pour les lointains voyages semble momentanément calmée; il a trente-deux ans et prend la résolution d'entrer dans les ordres. Pendant plusieurs années, il poursuit ses études théologiques et reçoit enfin, à Malines, le 21 décembre 1619, le sous-diaconat. Bientôt il est nommé curé de Beets; c'est là que nous le trouvons, observant une éclipse, le 9 décembre 1620.

Nous ne savons au juste combien de temps il dirigea cette paroisse; il rapporte des observations qu'il y fit jusqu'en 1631, et, en 1632, le 26 avril, lorsqu'il publie son éloge de la Toison d'or, il est encore pasteur du modeste village.

A cette époque, il est déjà célèbre; Erycius Puteanus proclame qu'il sait tout ce qu'on peut savoir ou que, si pareille science n'est point permise à l'homme, il ignore le moins possible; le conseil des finances lui octroie un subside annuel de cent-vingt florins et, pour apprécier la valeur de cette somme, on doit se rappeler que la chaire de mathématiques à Louvain valait deux cents florins à son possesseur; enfin, l'infante Isabelle, qui semble avoir

hérité du goût de son aïeul Charles-Quint pour l'astronomie, accorde à Wendelin une prébende de chanoine de Condé.

Ce n'est pas à Beets seulement que nous rencontrons notre savant; il est tantôt à Liège, tantôt à Bruxelles, à Anvers surtout, où l'appelle l'impression de son premier ouvrage, de son *Loxias*, qui constitue l'un de ses principaux titres scientifiques.

Bientôt il échange la cure de Beets contre celle de Herck, sa patrie; en 1635, le 3 mars, c'est dans cette ville qu'il observe une éclipse de lune, et pendant quinze ans il y poursuivra ses recherches astronomiques.

C'est dans le cimetière même qui entoure son église qu'il a établi ce qu'on peut appeler son observatoire; les deux tours du temple lui servent de mires. A ses côtés, il a disposé des sabliers, des cadrans sciatériques pour fixer l'heure des phénomènes; l'ombre de la lune, au besoin une visée, lui permettra de préciser les instants. Puis il s'aide de la sonnerie de l'horloge, non pas comme d'un moyen absolu, mais afin de déterminer les différences de temps. Ensuite il faut voir de quels moyens il fait usage pour mesurer avec exactitude les durées fort petites; il pourrait se servir des pulsations de l'artère, mais ce procédé lui inspire peu de confiance, car il dépend trop de l'état de santé, de la situation d'esprit où l'on se trouve; il a mieux que tout cela. Depuis sa jeunesse, il s'est exercé à réciter d'une manière uniforme le poème d'Hésiode : *Les œuvres et les jours*, trente vers par minute, un hémistiche par seconde. Nos astronomes se contenteraient difficilement de pareils instruments; mais ils n'étaient pas si défectueux entre les mains de qui savait en user, puisque, avec de pareils moyens, dès que l'emploi du pendule à secondes

se fut introduit, Wendelin, qui fut l'un des premiers à s'en servir, sut découvrir les causes principales d'inégalité des battements. Contrairement à l'affirmation de Galilée, il proclame l'influence de l'amplitude, et, qui plus est, un demi-siècle avant Lahire, il voit que les oscillations, en moyenne, sont plus longues en été qu'en hiver. Sans doute, il n'aperçoit par les causes immédiates du phénomène, mais, plus habile que Huygens et que Wallis, avertis cependant par lui, il découvre le fait lui-même. Cette observation fait le plus grand honneur à sa sagacité et à son habileté d'observateur. Faut-il ajouter que, pour rendre plus sensibles les inégalités qu'il constate, il se sert d'un pendule de quarante-deux pieds environ?

Il est curieux de voir combien il a su intéresser ses parents, ses confrères, ses paroissiens même à ses travaux.

Lorsqu'il est appelé à Bruxelles, à Anvers, ses frères le suppléent à Herck dans l'observation des éclipses; lorsqu'il observe lui-même, on voit le pasteur d'un village voisin, le curé de Donck, partager ses labeurs; il s'est créé des aides-astronomes, des jeunes gens intelligents et doués d'une excellente vue, qu'il associe à ses travaux; bien plus, c'est le secours des habitants qu'il invoque. Ils sont là, à quelque distance de lui-même, le contrôlant, notant le moment précis d'un phénomène.

Si, comme il y a lieu de le croire, il prenait la moyenne des résultats, il devait obtenir des nombres d'une exactitude fort grande; c'est, en effet, ce qui semble résulter de la concordance entre les données de ses observations et celles de ses calculs.

Je l'ai dit déjà : parfois il quittait sa paroisse, même au moment où il fallait observer une de ces éclipses qu'il aimait tant à noter; c'est qu'ailleurs il trouvait des instal-

lations meilleures que les siennes. A Bruxelles, c'est de préférence chez son ami Jean-Jacques Chifflet qu'il s'arrête, sans pour cela dédaigner l'accueil du comte de Bucquoi, du marquis de Torrès, du président Roose, du chancelier Boisschot; à Anvers, c'est le pensionnaire Jacques Edelheer qui le reçoit. Ce jurisconsulte n'est pas tant absorbé par ses charges de judicature qu'il ne puisse établir dans sa demeure un cercle mural excellent, dû aux mains habiles de l'élève, on dirait aujourd'hui l'assistant, de Descartes, Gérard van Gutschoven.

Le pensionnaire n'est pas seul à se servir de l'instrument; le 27 septembre 1643, par exemple, nous trouvons réunis chez lui, pour observer une éclipse, avec Wendelin et Gutschoven, le secrétaire de la ville, Gaspar Gevaert, un savant et un poète; le trésorier Jean van Eyck et même une dame, Anna Romer, tous entraînés par l'exemple de Wendelin.

L'âge n'a pas, on le voit, refroidi l'ardeur de notre savant; il ne cesse de parcourir les bibliothèques, de profiter de toutes les occasions qui s'offrent à lui d'augmenter ses connaissances, de pénétrer plus profondément dans les secrets de la nature. Il excite ses amis, ses correspondants à lui communiquer leurs découvertes, leurs observations. Sa réputation s'est étendue dans l'Europe entière : Gassendi, Naudé, Mersenne, Boulliaud, Petau, Huygens citent à l'envi ses travaux; Descartes, qui place si haut, et avec raison, sa Géométrie, met Wendelin au petit nombre des mathématiciens dignes de l'apprécier et désire vivement connaître le jugement qu'il en porte.

Un phénomène dont j'ai dit un mot déjà vint davantage encore appeler l'attention sur notre savant : c'est cette pluie rouge dont il a entendu parler dans son enfance, en

1590, dont il a été témoin une première fois, en 1608, à Forcalquier, et qui se reproduisit à Bruxelles le 6 octobre 1646.

Avec son ami Jean-Jacques Chifflet, Wendelin entreprend de donner l'explication de la pluie merveilleuse; il goûte l'eau recueillie et lui trouve une saveur analogue à celle des eaux de Spa; il rapproche le fait de coloration d'autres phénomènes naturels et attribue la couleur rosée de la pluie au mélange, à la vapeur d'eau, de vapeurs bitumineuses et sulfureuses.

Le petit livret où Wendelin rapporte cette explication fut bientôt entre toutes les mains. En peu de temps il fut imprimé deux fois à Bruxelles, la seconde édition avec des additions. La même année (1647) il fut réimprimé à Paris; en 1655, il trouva un nouvel éditeur à Londres. Jean-Jacques Chifflet, Gassendi, Plempius, Gaspar Gevaert, René Moreau, Robert Fervacque écrivirent de nombreuses lettres sur ce sujet; un professeur de Prague, Jean-Marc Marci, trop peu apprécié jusqu'ici, publia en 1647 un opuscule sous le même titre que celui du savant belge.

Le travail de Wendelin n'appelait pas seulement l'attention sur un phénomène météorologique qui se reproduisit en 1571, en 1590, en 1608, en 1638, en 1645, en 1646; il contenait une foule d'idées ingénieuses sur la constitution de la terre, sur l'existence d'un noyau liquide en ignition, sur l'attraction naturelle de la terre et de la lune, cause des marées, sur le mouvement elliptique des planètes.

La modeste cure de Herck, même un canonicat de Condé, ce pouvait sembler peu de chose pour un savant dont notre pays avait le droit d'être fier. Cependant, heureux au milieu de ses livres et de ses instruments, par-

tout accueilli comme il le méritait, Wendelin n'aurait probablement pas songé à se plaindre de voir les honneurs loin de lui. Mais les honneurs vinrent le chercher dans sa solitude de Herck : l'évêque de Tournai le nomma chanoine de sa cathédrale et même lui confia les fonctions d'official (1649).

Wendelin, revenu aux lieux où s'étaient écoulées quelques années de sa jeunesse, s'acquitta avec zèle de sa charge, mais n'en continua pas moins à observer les astres, car il ne faut pas croire la méchante remarque de van Langren dans une lettre à Bouillaud, que « le bon Vendelin ne faict plus rien, il se contente de sa bonne chanoinie à Tournay (7 sept. 1652). » La publication du *Teratologia cometica* vint donner un éclatant démenti à cette accusation de paresse.

Faut-il croire que le poids de l'âge commençait à se faire sentir, sept ans plus tard, lorsque notre astronome commit cette grosse erreur de calcul que lui reproche Huygens, au sujet de l'éclipse du 14 novembre 1659? « L'erreur du bonhomme Wendelinus, dit-il dans une lettre à Bouillaud du 11 décembre de cette année, a esté plaisante en cette même éclipse, car il l'attendoit un jour auparavant qu'elle ne devoit arriver, et cela avec toute la préparation nécessaire et en compagnie de plusieurs qu'il avoit conviéz. »

L'erreur était fort excusable, et Wendelin était encore robuste et plein de projets : il le montra bien lorsqu'il voulut, au commencement de l'année 1660, revoir sa chère Campine. Dans ce voyage il s'arrêta à Hasselt, fit cadeau de ses œuvres à son ami l'historien Mantelius et lui indiqua les nombreux travaux qu'il comptait publier encore.

Cependant, s'il faut en croire la plupart des historiens, sa vie ne se serait guère prolongée au delà de cette époque : il serait mort à Renaix, en 1660, après avoir renoncé à son canonicat de Tournai. Néanmoins on peut observer que dans son histoire de Hasselt, publiée en 1663, Mantelius ne parle pas de la mort de son ami, et que, d'après un portrait qui figure dans un ouvrage du savant Ghesquière, Wendelin n'aurait cessé de vivre qu'en 1667.

Il ne nous reste maintenant qu'à jeter un coup d'œil rapide sur l'œuvre de notre savant astronome, sur le travail accumulé pendant cette longue et laborieuse existence.

Dès sa jeunesse, comme nous l'avons dit, il détermina la latitude de Marseille : c'était le premier effort qu'il fit pour élucider une question née de l'examen d'une observation de l'ombre du gnomon, due à Pythéas.

La valeur de l'obliquité de l'écliptique, déduite de cette antique détermination, ne concordait point avec celle que divers astronomes avaient calculée.

Wendelin se refusait à croire à une variation brusque de cette obliquité ; avec son esprit investigateur, il prévoyait l'existence d'une loi qu'il fallait découvrir, vérifier ensuite. Alors que Tycho-Brahé avait cru devoir conclure à un accroissement momentané et singulier de l'obliquité, le jeune astronome ne pouvait admettre une modification inexpliquée d'une loi naturelle.

Tout d'abord, il démêle, avec une grande sagacité, les causes d'erreur qui peuvent influer sur la grandeur de la constante à calculer.

Il faut déterminer avec le plus grand soin la latitude des lieux où l'on observe, tenir compte des réfractions et enfin de la parallaxe solaire.

Avec une persévérance remarquable, Wendelin poursuivra, durant une longue série d'années, le cours de ses observations; pendant un quart de siècle, il accumule les résultats avant de publier son *Loxias*, et, plus tard, après l'apparition de son livre, il réunira tous les éléments nécessaires pour perfectionner son œuvre.

En premier lieu, il constate que les anciennes observations des latitudes, obtenues à l'aide du gnomon, doivent être corrigées du demi-diamètre apparent du soleil.

C'est ainsi qu'il est amené à poursuivre pendant plusieurs années, de 1605 à 1612, à Forcalquier, des recherches sur le diamètre apparent du soleil, en recevant sur un écran l'image de cet astre, par une ouverture étroite exactement mesurée.

Cette correction lui donne pour la latitude d'Alexandrie, élément essentiel de la question qu'il étudie, 31° 13′; d'un autre côté, la même latitude, déterminée par Ératosthènes à l'aide d'une observation d'étoile, est de 31° 9′; des considérations géodésiques enfin conduisent à admettre un nombre un peu différent : 31° 8′ 35″. Wendelin prend la moyenne approchée de ces trois résultats et fixe la latitude à 31° 10′.

De même, il reprend, avec le plus grand soin, le calcul de la distance du soleil ou, ce qui revient au même, de la parallaxe solaire. Il applique la méthode des dichotomies d'Aristarque de Samos et fait usage du télescope dès que la connaissance de cet instrument s'est généralisée.

Il fixa ainsi à une minute la parallaxe solaire. C'était déjà une valeur bien plus approchée que celle dont ses contemporains faisaient usage.

Armé de la sorte, il reprend la détermination de l'obliquité de l'écliptique et en constate la diminution continue depuis l'époque l'Ératosthènes.

Il va plus loin, car il exprime la loi du phénomène et en assigne même la période.

D'une façon absolue, cette loi n'est pas exacte; elle diffère de celle de Laplace, elle détermine la période d'un phénomène dont la périodicité n'est pas reconnue, même de nos jours. Mais, d'un autre côté, pour une durée relativement longue, la formule qui traduit sa loi représente assez bien la variation de l'obliquité de l'écliptique.

Wendelin ne s'en tint pas à ce premier essai; pendant vingt ans, il reprit différentes fois la question. C'est ainsi qu'il pria son ami Gassendi de refaire les observations du gnomon à Marseille, pour discuter à nouveau les résultats dus à Pythéas.

Appuyé sur de nouvelles observations de dichotomies et sur des vues théoriques ingénieuses, bien que parfois contestables, il évalue à 14″ au plus la parallaxe solaire, résultat le plus précis qu'on eût eu jusqu'alors.

Je ne rappellerai pas ses nombreuses observations d'éclipses dont il publia le tableau, et qui devaient lui servir à édifier ou plutôt à contrôler une nouvelle théorie de la lune.

Ajouterai-je qu'il s'est empressé d'admettre les théories copernìciennes, mieux encore les lois de Kepler.

Il n'hésita pas à faire connaître ses opinions dans son traité *De la pluie rouge* et dans son *Teratologia Cometica.*

Il ne prend qu'une minime précaution, bien mince en réalité. Le corps qui se meut dans son orbite elliptique, en trois cent soixante-cinq jours environ, s'appellera le *Tertium corpus.* Mais nul ne s'y trompe. Libert de Froidmont, l'ardent défenseur des décisions contraires à Galilée, appelle Wendelin le *Keplé-copernicien*, mais il ne reste pas moins son admirateur et son ami.

Bien plus, Wendelin apporta aux idées de Kepler une éclatante confirmation: il découvrit que, pour les satellites de Jupiter, la seconde loi du mouvement elliptique se vérifie; les carrés des temps de leurs révolutions autour de la planète sont entre eux comme les cubes de leurs distances à l'astre.

Il faut bien avouer cependant que notre astronome ne fut pas sans commettre quelques erreurs; c'est ainsi qu'il s'obstinait à vouloir établir l'égalité des jours solaires; c'est ainsi encore qu'il voulait faire parcourir à la lune une courbe ovoïde.

Le temps a passé sur les travaux de Wendelin; ses découvertes se sont effacées devant celles du grand Newton et de ses disciples; mais il ne serait pas juste d'oublier celui qui, le premier, a su démêler les variations dans la durée des oscillations du pendule, qui a constaté et établi la diminution continue de l'obliquité de l'écliptique, qui a calculé, avec une exactitude inconnue jusqu'à lui, la parallaxe solaire, qui enfin a contribué à établir d'une manière ferme le système de Kepler.

De nombreux chercheurs, surtout en Provence, et à leur tête un descendant d'André d'Arnaud, M. de Berluc Perussis, puis le savant éditeur des lettres de Peiresc, M. Tamizey de Larroque, M. Tardieu de Sisteron, M. l'abbé Pierrisnard s'occupent à rappeler la gloire de l'astronome flamand. Bientôt, sur le sommet de Lure, dominant sa Provence aimée, un monument durable s'élèvera en souvenir du Belge qui, devançant de plus de deux siècles les observateurs du Ventoux, a commencé dans ces contrées les premières recherches météorologiques.

DISTANCES DES POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE (*)

PAR CLÉMENT THIRY.

Nous nous proposons de démontrer, dans ce petit travail, une relation générale remarquable (P) *donnant la distance d'un point quelconque* P *au point d'intersection* K_n *des droites qui, issues des sommets d'un triangle, partagent les côtés opposés dans le rapport des puissances* $n^{ièmes}$ *des côtés adjacents,* relation dont les formules classiques, ainsi que la plupart des formules relatives aux points de Brocard, de Lemoine, de Gergonne, etc., ne sont que des cas particuliers; nous établirons aussi une seconde relation (T), assez générale, conduisant à d'autres résultats plus ou moins remarquables.

Notations et préliminaires. 1. Soient O, R le centre et le rayon du cercle circonscrit; I, r le centre et le rayon du cercle inscrit; G le centre de gravité; H l'orthocentre; K le point de Lemoine; enfin W et W′ les points de Brocard d'un triangle ABC de surface S.

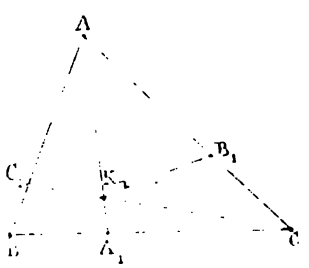


FIG. 1.

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e série, t. XXI, n° 4, pp. 471-481, 1891.

2. Soient, sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, des points A_1, B_1, C_1, tels que (fig. 1)

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c^n}{b^n}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{a^n}{c^n}, \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{b^n}{a^n}.$$

On a

$$\frac{BA_1 \times CB_1 \times AC_1}{CA_1 \times AB_1 \times BC_1} = \frac{c^n . a^n . b^n}{b^n . c^n . a^n} = 1 ;$$

les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent donc en un même point que nous désignerons par K_n.

On a

$$\frac{AK_n}{A_1K_n} = \frac{AC_1 \times BC}{BC_1 \times CA_1} = \frac{b^n}{a^n} \times \frac{b^n + c^n}{b^n} = \frac{b^n + c^n}{a^n}.$$

Cas particuliers. Si $n = 0$, $K_0 = G$; si $n = 1$, $K_1 = I$; si $n = 2$, $K_2 = K$.

3. Si M est un point de la base BC du triangle ABC tel que $BM : MC = m : n$, on a

$$n\overline{AB}^2 + m\overline{AC}^2 = (m + n)\overline{AM}^2 + \frac{mn}{m + n}\overline{BC}^2.$$

C'est sous cette forme que nous emploierons le *théorème de Stewart*, théorème qui nous servira à établir toutes les formules dont nous avons parlé plus haut.

4. On démontre aisément, par la géométrie seule, les relations suivantes :

$$\overline{WA}^2 = \frac{b^4c^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{WB}^2 = \frac{c^4a^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{WC}^2 = \frac{a^4b^2}{\Sigma a^2b^2},$$

$$\overline{W'A}^2 = \frac{c^4b^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{W'B}^2 = \frac{a^4c^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{W'C}^2 = \frac{b^4a^2}{\Sigma a^2b^2};$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{AW}{WD} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{a^2c^2}, \quad \overline{AD}^2 = \frac{c^2 . \Sigma a^2b^2}{(c^2 + a^2)^2},$$

le point D étant l'intersection de AW et de BC, Σa^2b^2 la quantité $(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$.

A. *Le carré de la distance d'un point quelconque* P, *au point d'intersection* K_n *des droites qui, issues des sommets d'un triangle* ABC, *partagent additivement les côtés opposés, dans le rapport des puissances* $n^{ièmes}$ *des côtés adjacents, est donné par la relation*

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{a^n\overline{PA}^2 + b^n\overline{PB}^2 + c^n\overline{PC}^2}{a^n + b^n + c^n} - \left(\frac{abc}{a^n + b^n + c^n}\right)^2 (a^{n-2}b^{n-2} + a^{n-2}c^{n-2} + b^{n-2}c^{n-2}). \quad (P)$$

Soit (fig. 2) M le point d'intersection de AK_n avec BC.

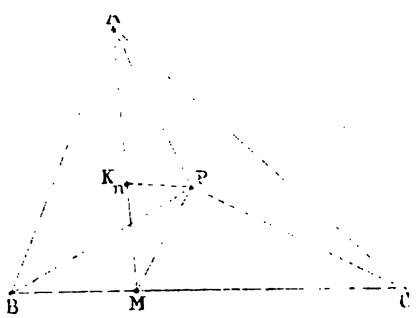


FIG. 2.

Appliquons le théorème de Stewart aux triangles APM, BPC, ABC, nous aurons, à cause de

$$\frac{AK_n}{K_nM} = \frac{b^n + c^n}{a^n}, \quad \frac{BM}{MC} = \frac{c^n}{b^n};$$

$$a^n.\overline{PA}^2 + (b^n + c^n)\overline{PM}^2 = (a^n + b^n + c^n)\overline{PK_n}^2 + \frac{a^n(b^n + c^n)}{a^n + b^n + c^n}\overline{AM}^2, \quad (1)$$

$$b^n.\overline{PB}^2 + c^n.\overline{PC}^2 = (b^n + c^n)\overline{PM}^2 + \frac{b^nc^n}{b^n + c^n}.a^2, \quad . \quad . \quad (2)$$

$$b^n.c^2 + c^n.b^2 = (b^n + c^n)\overline{AM}^2 + \frac{b^nc^n}{b^n + c^n}.a^2. \quad . \quad . \quad (3)$$

De ces égalités on tire la relation (P), que nous écrirons, d'une façon abrégée,

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - \left(\frac{abc}{\Sigma a^n}\right)^2 . \Sigma a^{n-2} b^{n-2} = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - E_n, \quad . \text{(P)}$$

E_n étant une constante indépendante de la position du point P.

Positions remarquables du point P. I. Si le point P est le centre O, alors PA = PB = PC = R; et, partant,

$$\overline{OK_n}^2 = R^2 - E_n. \quad . \quad . \quad .

Quelques valeurs particulières de E_n. Si nous faisons successivement dans E_n, $n=0$, $n=1$, $n=2$, nous trouverons :

$$E_0 = \frac{a^2b^2c^2}{(1+1+1)^2}\left[\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right] = \frac{a^2+b^2+c^2}{9};$$

$$E_1 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)^2}\left[\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right] = \frac{abc}{a+b+c} = 2rR;$$

$$E_2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\left[a^0b^0+a^0c^0+b^0c^0\right] = \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Positions remarquables du point K_n. Les formules générales (O), (H), (W) et (P) donnent immédiatement, pour $n=0$, $n=1$, $n=2$:

$$(O)\ .\ \begin{cases} \overline{OG}^2 = R^2 - E_0 = R^2 - \dfrac{(a^2+b^2+c^2)}{9}. \\ \overline{OI}^2 = R^2 - E_1 = R^2 - 2Rr. \\ \overline{OK}^2 = R^2 - E_2 = R^2 - \dfrac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}. \end{cases}$$

$$(H)\ .\ \begin{cases} \overline{HG}^2 = 4R^2 - \dfrac{4}{9}(a^2+b^2+c^2) = 4\overline{OG}^2. \\ \overline{HI}^2 = 4R^2 - \dfrac{(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c} - 2Rr. \\ \overline{HK}^2 = 4R^2 - \dfrac{(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2} - \dfrac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}. \end{cases}$$

$$\overline{WG}^2 = \frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2}{3\Sigma a^2b^2} - \frac{(a^2+b^2+c^2)}{9}.$$

$$(W).\quad \left\{\begin{aligned} \overline{WI}^2 &= \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2.2p}\left[\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\right] - 2Rr \\ &= \frac{abc}{\Sigma a^2b^2.2p}\left|b^2c+c^2a+a^2b\right| - 2Rr \\ &= \frac{2Rr}{\Sigma a^2b^2}\left|a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right| \text{ (*)}. \end{aligned}\right.$$

$$\overline{WK}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \overline{W'K}^2.$$

$$(P).\quad \left\{\begin{aligned} \overline{GK}^2 &= \frac{\Sigma a^2\overline{GA}^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \\ \overline{IK}^2 &= \frac{\Sigma a^2\overline{IA}^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \\ \overline{IG}^2 &= \frac{\Sigma\overline{IA}^2}{3} - \frac{(a^2+b^2+c^2)}{9} \\ &= r^2 + \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{p^2}{3} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \overline{KG}^2 &= \frac{\Sigma\overline{KA}^2}{3} - \frac{(a^2+b^2+c^2)}{9}. \\ \overline{KI}^2 &= \frac{\Sigma a\overline{KA}^2}{2p} - 2Rr. \\ \overline{GI}^2 &= \frac{\Sigma a\overline{GA}^2}{2p} - 2Rr \\ &= \frac{2r^2}{3} - 4Rr + \frac{(a^2+b^2+c^2)}{18}. \end{aligned}\right.$$

B. Soient (fig. 3) M un point de la base BC et T_a un point de AM, tels que $BM : CM = m : n$, $AT_a : T_aM = \alpha : \beta$.

En appliquant le théorème de Stewart aux triangles AOM, BOC, ABC, on a

$$\overline{OT_a}^2 = \frac{\beta.R^2 + \alpha.\overline{OM}^2}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \times \overline{AM}^2,$$

$$\overline{OM}^2 = R^2 - \frac{mn}{(m+n)^2} \times a^2,$$

$$\overline{AM}^2 = \frac{nc^2+mb^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2} \times a^2;$$

(*) Catalan, *Quelques formules relatives aux triangles rectilignes* (Mém. in-8° de l'Académie, t. XLIV), p. 19.

d'où, en substituant, puis en réduisant,

$$\overline{OT_\alpha}^2 = R^2 - \frac{\alpha}{(m+n)(\alpha+\beta)^2}\left[\frac{mn\alpha}{m+n}a^2 + \beta(mb^2+nc^2)\right], \quad (T)$$

formule plus générale, mais moins élégante, que la formule (O).

Fig. 3.

Corollaire Si $\alpha = m + n$, on a

$$\overline{OT_\alpha} = R^2 - \frac{1}{(m+n+\beta)^2}\left[mna^2 + \beta(mb^2+nc^2)\right]. \quad (t)$$

Cas particuliers remarquables. I. En donnant à m, n, α, β les valeurs nécessaires, la relation (t) fournit les distances OG, OI, OK, OK_a.

II. Si l'on fait $m = c^2$, $n = a^2$, $\alpha = a^2b^2 + b^2c^2$, $\beta = a^2c^2$, le point T_a est le point de Brocard W; la formule (T) donne, toutes réductions faites,

$$\overline{OW}^2 = R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2} = \overline{OW'}^2.$$

formule trouvée par M. Catalan.

III. Si $m = p-b$, $n = p-c$, $\alpha = a(p-a)$, $\beta = (p-b)(p-c)$, le point T_a est le *point de Gergonne* (*).

(*) Point d'intersection des droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact du cercle inscrit.

Quelques conséquences des formules obtenues.

I. Puisque KW = KW', OW = OW', *la droite* WW' *est donc perpendiculaire à* OK *en son milieu.*

II.

$$\overline{WO}^2 + \overline{WK}^2 = \left(R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2}\right) + \left(\frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2} - E_2\right) = R^2 - E_2 = \overline{OK}^2;$$

l'angle OWK est donc droit, et, partant, OW'K l'est aussi.

Conséquemment, le cercle de diamètre OK *passe par les points de Brocard.* C'est le *cercle de Brocard* du triangle.

III. Si, dans la formule (P), nous faisons coïncider le point P avec le point K_n, nous aurons la jolie relation

$$\Sigma a^n \overline{AK}_n^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^n} \cdot \Sigma a^{n-2}b^{n-2},$$

laquelle donne successivement, pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$:

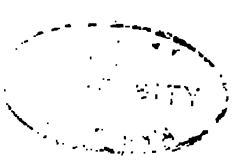
$$\Sigma \overline{AG}^2 = \frac{\Sigma a^2}{3}, \quad \Sigma a . \overline{AI}^2 = abc, \quad \Sigma a^2 \overline{AK}^2 = \frac{3a^2b^2c^2}{\Sigma a^2} = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma \overline{AG}^2}.$$

IV. Soit α l'angle de Brocard; en se servant des valeurs connues de $\operatorname{tg}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$, on a

$$\overline{OK}^2 = R^2(1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha), \quad \overline{WK}^2 = 4R^2\sin^2\alpha - 3\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$\overline{WO}^2 = R^2(1 - 4\sin^2\alpha),$$

$$\overline{WK}_n^2 = 4R^2\sin^2\alpha . \frac{\Sigma a^{n-2}b^2}{\Sigma a^n} - E_n, \quad \overline{WH}^2 = 4R^2\cos^2\alpha - \frac{\Sigma a^2b^4}{\Sigma a^2b^2}.$$



RETURN TO ➡ **Astronomy/Mathematics/Statistics/Computer Science Library**
100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 **7 DAYS**	2	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

DUE AS STAMPED BELOW

FORM NO. DD 3, 13m, 6'76

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037489575